

А.Г. Лесков, К.В. Бажинова, Е.В. Селиверстова

# Кинематика и динамика исполнительных механизмов манипуляционных роботов

*Учебное пособие*



Москва  
ИЗДАТЕЛЬСТВО  
МГТУ им. Н. Э. Баумана  
2017

УДК 621.865  
ББК 32.816  
Л50

Издание доступно в электронном виде на портале *ebooks.bmstu.ru*  
по адресу: <http://ebooks.bmstu.ru/catalog/190/book1707.html>

Факультет «Специальное машиностроение»  
Кафедра «Робототехнические системы и мехатроника»

*Рекомендовано Редакционно-издательским советом  
МГТУ им. Н.Э. Баумана в качестве учебного пособия*

**Лесков, А. Г.**

Л50

Кинематика и динамика исполнительных механизмов манипуляционных роботов : учебное пособие / А. Г. Лесков, К. В. Бажинова, Е. В. Селиверстова. — Москва : Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2017. — 102, [2] с. : ил.

ISBN 978-5-7038-4752-7

Рассмотрены вопросы определения положения и ориентации звеньев манипуляционных роботов, нахождения параметров движения робота по известным значениям сил и моментов, которые развивают приводы, а также внешних сил и моментов. Представлены методы расчета прямой и обратной позиционных кинематических задач, прямой и обратной кинематических задач о скоростях звеньев манипулятора, прямой и обратной задач динамики исполнительного механизма. Приведены аналитическое решение задач кинематики для кинематической схемы промышленного робота Kawasaki FS020N и расчет инерционных коэффициентов для его звеньев.

Для студентов, обучающихся по специальности «Мехатроника и робототехника».

УДК 621.865  
ББК 32.816

ISBN 978-5-7038-4752-7

© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017  
© Оформление. Издательство  
МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017

## Предисловие

Робототехника занимает одно из важных мест в программах развития науки, техники и технологий во многих странах мира. Среди робототехнических систем особо выделяются манипуляционные роботы. С их помощью осуществляется выполнение транспортных, монтажных, сборочных и других операций, аналогичных тем, которые выполняет человек руками.

Учебное пособие составлено по материалам лекций, которые профессор А.Г. Лесков читает в Московском государственном техническом университете имени Н.Э. Баумана.

В издании математически описаны кинематика и динамика многозвенных манипуляционных роботов, рассмотрены проблемы проектирования исполнительных механизмов манипуляторов и их подсистем и вопросы управления манипуляционными роботами. Структурно пособие содержит две части: первая посвящена кинематике, вторая — динамике механизмов указанных роботов. Обе части состоят из тематических разделов, в завершении которых предложены контрольные вопросы для проверки понимания и усвоения изложенного материала.

В первой части приведены типы кинематических схем исполнительных механизмов манипуляционных роботов (МР), понятия о системах координат звеньев и обобщенных координатах шарниров исполнительных механизмов МР, определение матриц поворота, используемых при записи уравнений, и производных по времени этих матриц. Наряду с этим описаны основные понятия аналитической геометрии, необходимые для понимания материала пособия. Определены связи между линейными координатами и углами ориентации звеньев исполнительных механизмов МР, а также матрица Якоби для угловых и линейных скоростей этих звеньев, решены кинематические задачи о скоростях звеньев манипулятора. Объяснены понятия сингулярных конфигураций кинематической цепи исполнительных механизмов МР и способы их избежать. Приведен пример выполнения аналитического решения прямой и обратной задач кинематики для промышленного робота Kawasaki FS020N.

Во второй части описаны внешние силы и моменты, действующие на звенья исполнительных механизмов МР, силы и моменты, развиваемые приводами манипулятора. Показана последовательность составления уравнений движения, объяснен физический смысл компонентов, входящих в эти уравнения. Описаны прямая и обратная задачи динамики исполнительного механизма.

Пособие может представлять интерес для научных сотрудников, инженеров, занимающихся созданием и применением робототехнических средств и интересующихся проблемами робототехники.

## Список сокращений

ВТ	—	вращательный тип
ЗУМ	—	захватное устройство манипулятора
МР	—	манипуляционный робот
ОЗД	—	обратная задача динамики
ОКЗ	—	обратная кинематическая задача
ОПКЗ	—	обратная позиционная кинематическая задача
ПЗД	—	прямая задача динамики
ПКЗ	—	прямая кинематическая задача
ПТ	—	поступательный тип
РТС	—	робототехнические системы
СК	—	система координат
<i>KCI</i> (kinematic configuration index)	—	индекс конфигурации кинематической цепи

## Введение

В настоящее время робототехнические устройства все шире применяются в различных областях промышленности, особенно в автомобиле- и авиастроении, атомной энергетике, как бортовые устройства в составе космических и подводных аппаратов, а также в медицине, особенно в низкоинвазивной хирургии, военной области, при проведении спасательных и разведывательных работ в случае чрезвычайных ситуаций и т. д.

Ключевыми факторами, которые обуславливают такое широкое применение робототехнических систем (РТС), служат технологические достоинства современных МР — точность выполнения ими повторяющихся операций, легкость перехода с одной задачи на другую, простота управления, небольшие масса и габариты, совершенное программное обеспечение. Кроме того, РТС выполняют необходимые действия в опасной или недоступной для человека среде, например при подводных и надпланетных исследованиях, сборе космического мусора, в радиоактивно или химически зараженных местностях, при ведении военных или разведывательных действий.

Манипуляционные роботы (или манипуляторы) — основные компоненты многих современных и перспективных робототехнических комплексов, включающие в себя многозвенные пространственные исполнительные механизмы со многими степенями подвижности, системы следящих приводов и управления ими, которые представляют собой сложные многомерные динамические системы.

К современным МР предъявляются высокие требования по точности и быстродействию при выполнении ими различных заданий, в том числе с захваченным объектом (в частности, по точности отработки заданных траекторий, скоростей, ускорений, усилий захвата). Эффективность МР в значительной степени зависит от качества управления ими, высокий уровень которого можно обеспечить только при адекватном учете их *кинематических и динамических свойств* как на этапах проектирования, так и при эксплуатации.

В целях выполнения необходимых требований при проектировании и управлении МР следует использовать методы механики, теории механизмов и машин, автоматического управления, упругости и колебаний. Сложность проведения расчетов обусловила развитие методов, ориентированных на применение современных компьютерных технологий. Для компьютеризированных расчетов рекомендуются матрично-векторные методы описания кинематики и динамики МР, на которых основан материал настоящего пособия.

*Кинематикой роботов* называется раздел робототехники о движении РТС в трехмерном пространстве относительно заданной абсолютной системы

координат в зависимости от времени, но без учета сил и моментов, порождающих такое движение. Кинематика манипуляторов — наиболее важная область робототехники, так как реальное манипулирование может быть осуществлено только посредством обеспечения необходимого движения рабочего органа робота (и связанных с ним объектов) в трехмерном евклидовом пространстве. Таким образом, предметом кинематики манипуляторов является описание пространственного положения манипулятора как функции времени.

Манипулятор с точки зрения механики и теории механизмов и машин — сложный пространственный управляемый механизм с несколькими степенями свободы, содержащий жесткие и упругие звенья, передачи и приводы. Конструктивно манипулятор состоит из нескольких твердых тел (звеньев), последовательно соединенных вращательными или поступательными сочленениями, приводимыми в движение силовыми приводами. Звенья манипулятора образуют разомкнутую кинематическую цепь. Один конец этой цепи соединен с основанием (базой), а другой — свободен и снабжен рабочим инструментом, позволяющим воздействовать на объекты манипулирования или выполнять различные технологические операции, например сборочные.

Два смежных звена в кинематической цепи составляют кинематическую пару. Количество степеней свободы кинематической пары определяется числом независимых движений одного звена пары относительно другого. В большинстве случаев звенья манипулятора образуют кинематические пары пятого класса, в которых относительное движение звеньев определяется одним параметром. В качестве такого параметра может выступать угол поворота или линейное перемещение. В первом случае имеет место пара вращательного типа, во втором — поступательного.

Если звенья исполнительных механизмов считаются твердыми телами, то манипулятор рассматривается как механическая система, для которой справедливы основные положения механики твердого тела. Для математического описания такой системы применяются классические методы кинестатики. При наличии упругих звеньев следует учитывать изменение геометрических параметров звеньев при деформации. Для математического описания исполнительных механизмов с упругими звеньями также разработаны следующие методы: модальный, конечных элементов и др.

Основной задачей манипулирования является перемещение рабочего органа манипулятора в определенную точку с требуемой ориентацией в заданное время при наличии внешних воздействий. Ее решение возможно в результате согласованных управляющих воздействий на каждое сочленение цепи звеньев манипулятора.

Таким образом, управление манипуляционным роботом осуществляется в пространстве координат шарниров. Поскольку положение и ориентация рабочего органа манипулятора задаются, как правило, в некоторой базовой системе координат, возникает необходимость нахождения углов шарниров, при которых рабочий орган манипулятора либо крайняя точка последнего звена любого другого устройства оказались бы в заданной точке с заданной ориентацией, т. е. решения *обратной позиционной кинематической задачи*.

Определение пространственного положения и ориентации звеньев исполнительного механизма манипулятора по заданным значениям координат шарниров носит название *прямой позиционной кинематической задачи*.

Аналогично формируются кинематические задачи о скоростях. В *прямой кинематической задаче о скоростях* находят параметры движения рабочего органа манипулятора по заданным законам изменения координат шарниров. В *обратной кинематической задаче о скоростях* по заданному закону движения рабочего органа находят параметры движения в приводах манипулятора.

Предметом *динамики манипулятора* как раздела робототехники является математическое описание законов движения его звеньев под действием внешних сил и моментов, а также сил и моментов, развиваемых приводами. Уравнения динамики используются при проведении аналитических исследований, при выборе законов управления, а также в задачах моделирования движения манипулятора. При получении уравнений динамики движения манипулятора используются различные методы, в том числе методы Лагранжа, Ньютона — Эйлера, Д'Аламбера. Их можно использовать для решения и прямой, и обратной задач динамики. *Прямая задача* динамики состоит в том, чтобы по заданным силам и моментам, развиваемым приводами манипулятора, а также по внешним силам и моментам, определить параметры движения его звеньев, *обратная задача* — в том, чтобы по заданным обобщенным координатам, скоростям и ускорениям определить действующие в сочленениях манипулятора силы и моменты.

# І. Кинематика

Рассмотрим параметры звеньев исполнительного механизма, их линейные координаты и углы ориентации, матрицы поворота, используемые при записи уравнений, и их производные по времени, а также угловые и линейные скорости и ускорения звеньев МР. Введем в рассмотрение прямую и обратную позиционные кинематические задачи, прямую и обратную кинематические задачи о скорости звеньев, приведем примеры их решения.

## 1. Координаты и параметры

### 1.1. Описание и типы кинематических схем

*Исполнительный механизм манипуляционного робота* — многозвенный пространственный механизм, звенья которого последовательно связаны между собой кинематическими парами (шарнирами), образуя открытую (незамкнутую) линейную кинематическую цепь.

Рассмотрим исполнительные механизмы, звенья которых представляют собой абсолютно твердые тела. При составлении кинематического описания все звенья следует пронумеровать, начиная от основания. Первое звено связано с неподвижным основанием, которому присваивается № 0.

Каждая кинематическая пара допускает относительное вращение или относительное линейное перемещение смежных звеньев в направлении только одной оси. Иными словами, кинематическая пара может быть вращательного (ВТ) или поступательного типа (ПТ)\*.

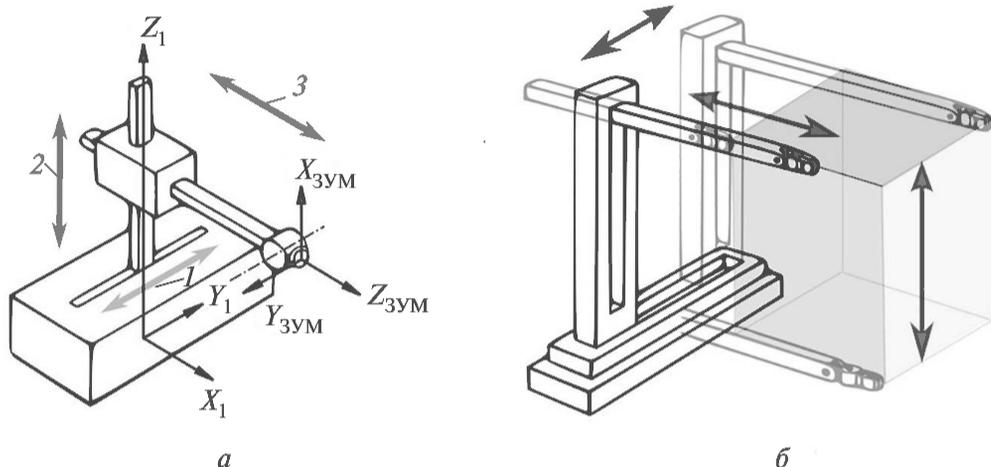
В зависимости от кинематической схемы манипулятора его захватное устройство (ЗУМ) может совершать движения в той или иной системе координат (СК) и рабочее пространство МР может принимать различные геометрические формы. Различают четыре основных СК, в которых могут работать манипуляторы, — прямоугольную, цилиндрическую, сферическую и ангулярную (антропоморфную).

---

\* Запись « $i = [ВТ]$ » следует читать «шарнир  $i$  вращательного типа», а « $i = [ПТ]$ » — «шарнир  $i$  поступательного типа». Положение исполнительного механизма, при котором координаты всех шарниров имеют нулевые значения, принимается за исходное положение.

### *Манипулятор, работающий в прямоугольной системе координат*

Кинематическая цепь такого манипулятора состоит из трех кинематических пар (рис. 1.1, а). Две из них (1 и 3) расположены в горизонтальной плоскости и направлены вдоль перпендикулярных осей  $X_1$  и  $Y_1$  соответственно. Кинематическая пара 2 обеспечивает поступательное движение вдоль вертикальной оси  $Z_1$ . Рабочее пространство манипулятора, работающего в прямоугольной СК, представляет собой параллелепипед (рис. 1.1, б).



**Рис. 1.1.** Конструктивная схема (а) и рабочее пространство (б) манипулятора, работающего в прямоугольной системе координат

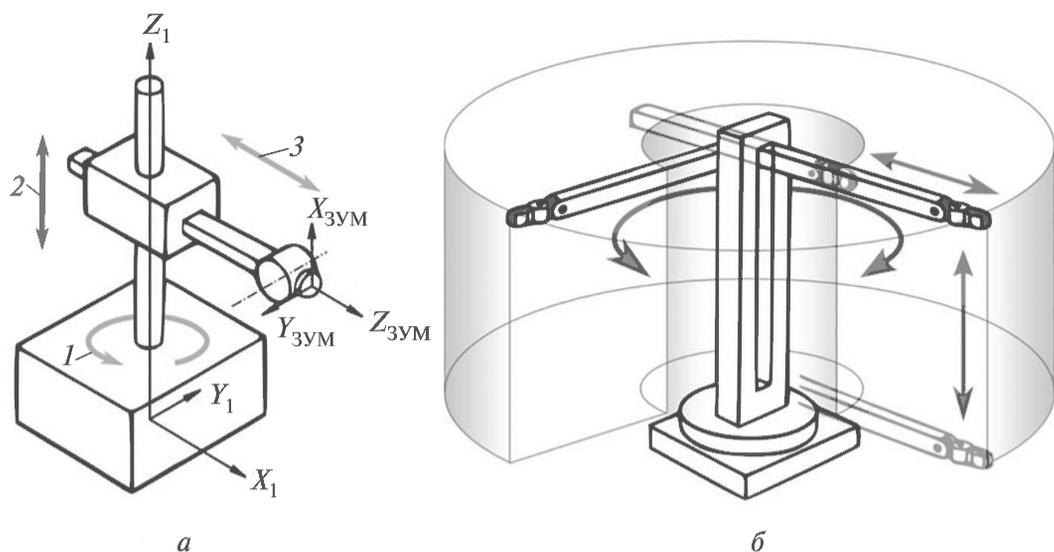
Роботы такого типа обеспечивают высокую точность позиционирования и большую грузоподъемность, но невозможность изменять ориентацию ЗУМ делает их недостаточно маневренными. Такие манипуляторы пригодны для выполнения операций сборки, установки и съема деталей при механической обработке, транспортировке и укладке грузов.

### *Манипулятор, работающий в цилиндрической системе координат*

Кинематическая цепь такого манипулятора состоит из двух кинематических пар ПТ и одной — ВТ (рис. 1.2, а). Кинематическая пара ВТ 1 обеспечивает поворот вокруг вертикальной оси  $Z_1$ . Две пары ПТ (2 и 3) расположены в горизонтальной плоскости и направлены вдоль перпендикулярных осей  $X_1$  и  $Y_1$  соответственно. Рабочее пространство манипулятора, работающего в цилиндрической СК, представляет собой цилиндр с исключенной внутренней частью («мертвая зона») (рис. 1.2, б).

Диапазон манипулирования робота такого типа не ограничен фронтальным пространством, в отличие от роботов с прямоугольной СК, возможны перемещения рабочего органа по обе стороны от манипулятора. Такие роботы обеспечивают точность позиционирования и высокую грузоподъемность. Это семейство роботов ранее было широко распространено благодаря большой рабочей зоне и простоте вычислений координат ЗУМ в рабочем пространстве, что позволяло использовать для расчета законов управления

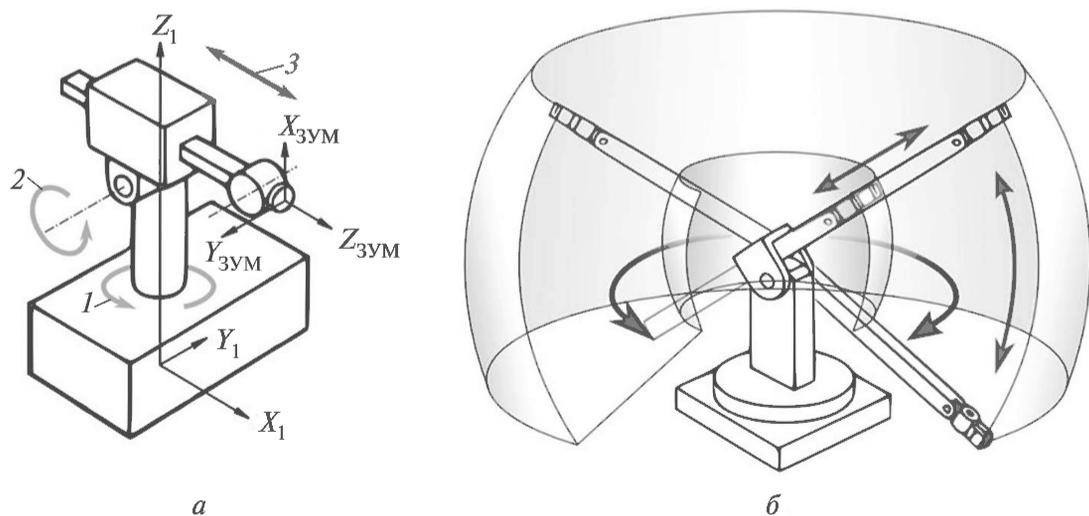
не очень производительную вычислительную технику. Однако в настоящее время эти роботы уступают свои позиции манипуляторам, работающим в ангулярной (антропоморфной) СК.



**Рис. 1.2.** Конструктивная схема (а) и рабочее пространство (б) манипулятора, работающего в цилиндрической системе координат

### *Манипулятор, работающий в сферической системе координат*

Кинематическая цепь такого манипулятора состоит из двух кинематических пар ВТ и одной — ПТ (рис. 1.3, а). Кинематическая пара ВТ 1 обеспечивает поворот вокруг вертикальной оси  $Z_1$ , вращательная кинематическая пара ВТ 2 — вокруг горизонтальной оси  $Y_1$ . Кинематическая пара ПТ 3 расположена в горизонтальной плоскости и направлена вдоль оси  $X_1$ . Рабочее пространство манипулятора, работающего в полярной СК, представляет собой усеченную сферу (рис. 1.3, б).

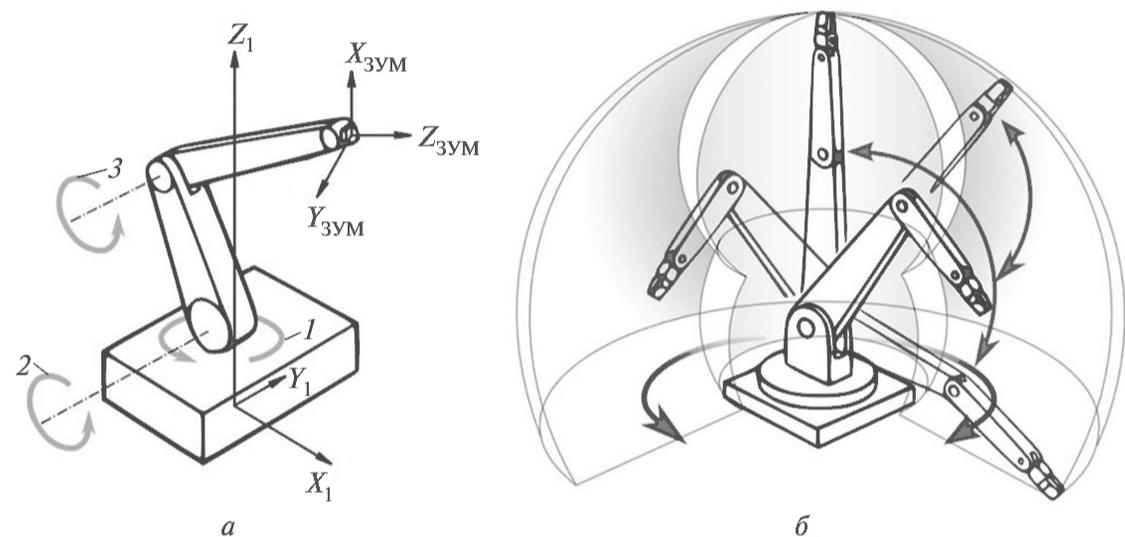


**Рис. 1.3.** Конструктивная схема (а) и рабочее пространство (б) манипулятора, работающего в сферической системе координат

Манипуляторы, работающие в сферической СК, отличаются большим рабочим пространством и более широкими возможностями манипулирования. По грузоподъемности они уступают роботам других типов и используются преимущественно в качестве технологических роботов для покраски и сварки изделий.

### *Манипулятор, работающий в ангулярной (антропоморфной) системе координат*

Кинематическая цепь такого манипулятора состоит из трех кинематических пар ВТ (рис. 1.4, а). Кинематическая пара ВТ 1 обеспечивает поворот вокруг вертикальной оси  $Z_1$ . Кинематические пары ВТ 2 и 3 обеспечивают последовательный поворот вокруг горизонтальной оси  $Y_1$ . Рабочее пространство манипулятора, работающего в ангулярной (антропоморфной) СК, представляет собой в большинстве случаев сферу (рис. 1.4, б).



**Рис. 1.4.** Конструктивная схема (а) и рабочее пространство (б) манипулятора, работающего в ангулярной (антропоморфной) системе координат

Это семейство наиболее распространено в наше время. Кинематическая схема таких роботов копирует человеческую руку. Их отличает большая грузоподъемность, гибкость и малые размеры «мертвой зоны». Основной недостаток — сложность определения законов движения.

## 1.2. Системы координат звеньев

С каждым из звеньев исполнительных механизмов связывается правая прямоугольная (ортогональная) СК так, как показано на рис. 1.5. Система координат  $i$ -го звена  $\{СК\}_i$  связана со звеном  $i$  таким образом, что ось  $Z_i \{СК\}_i$  совмещается с осью  $(i + 1)$ -го сочленения, а начало  $\{СК\}_i$  располагается в центре  $(i + 1)$ -го шарнира. Оси  $X_i$  и  $Y_i$  направляются произвольным образом, но целесообразно одну из них направить вдоль звена  $i$ , а другую — в поперечном направлении. Ось  $Z_n \{СК\}_n$  направляется вдоль последнего звена,

на котором размещено ЗУМ, в сторону рабочего пространства. Начало  $\{СК\}_n$  в этом случае размещается в центре ЗУМ. С неподвижным основанием связывается  $\{СК\}_0$ .

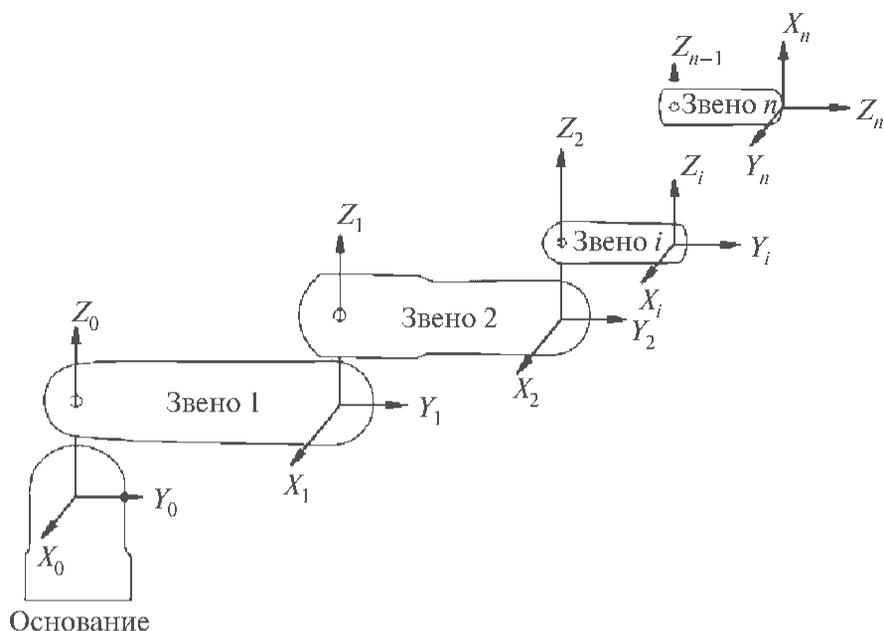


Рис. 1.5. Системы координат звеньев

Под *связанными* подразумевают такие СК, которые связаны со звеньями исполнительных механизмов МР.

В общем случае  $\{СК\}_0$  не является инерциальной, но может иметь смещение и поворот относительно инерциальной СК. Будем полагать, что смещение и поворот отсутствуют, если нет указания на их наличие, а значит, примем СК основания за инерциальную СК.

### 1.3. Обобщенные координаты шарниров

Обобщенные координаты шарниров исполнительных механизмов МР служат для определения взаимного расположения звеньев и обозначаются как  $q_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), где  $n$  — количество звеньев исполнительного механизма.

Введем следующие обозначения (рис. 1.6):

$\theta_i$  — угол поворота звена  $i$  относительно звена  $i - 1$  вокруг оси  $Z_{i-1}$ , если  $i = [BT]$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ;

$s_i$  — линейное перемещение звена  $i$  относительно звена  $i - 1$  вдоль оси  $Z_{i-1}$ , если  $i = [PT]$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Переменная  $\theta_i$  отсчитывается при повороте звена  $i$  относительно звена  $i - 1$  вокруг оси  $Z_{i-1}$ . Положительное значение  $\theta_i$  соответствует повороту звена  $i$  в таком направлении, когда положительное направление оси  $X_{i-1}$  приближается к положительному направлению оси  $Y_{i-1}$  по кратчайшему расстоянию при наблюдении с конца орта оси  $Z_{i-1}$ .

Переменная  $s_i$  отсчитывается при перемещении звена  $i$  относительно звена  $i - 1$  вдоль оси  $Z_{i-1}$ . Положительное значение  $s_i$  соответствует перемещению звена  $i$  в направлении оси  $Z_{i-1}$ .

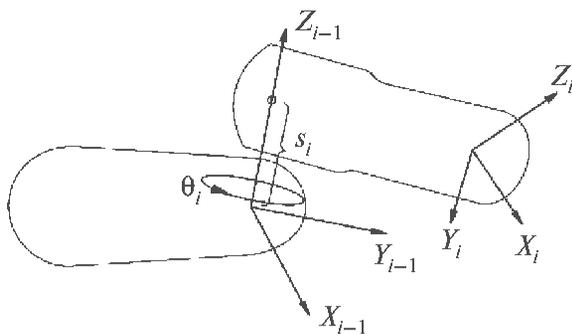


Рис. 1.6. Координаты сочленений исполнительных механизмов

Будем полагать, что  $q = \{q_i\}$  — вектор размера  $(n \times 1)$ , в котором  $q_i = \theta_i$ , если  $i = [\text{ВТ}]$ , и  $q_i = s_i$ , если  $i = [\text{ПТ}]$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Учет типа сочленения проводится за счет множителя  $\sigma_i$ :  $\sigma_i = 1$  при  $i = [\text{ВТ}]$  и  $\sigma_i = 0$  при  $i = [\text{ПТ}]$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Поскольку

$$\theta_i = \sigma_i \cdot q_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$s_i = (1 - \sigma_i) q_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

можно записать

$$q_i = \sigma_i \cdot \theta_i + (1 - \sigma_i) \cdot s_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.1)$$

объединив указанные выражения в одно.

## 1.4. Параметры

Рассмотрим параметры, определяющие кинематическую схему исполнительных механизмов, геометрические и инерционные параметры его звеньев.

**Параметры, определяющие кинематическую схему исполнительного механизма.** К этим параметрам относятся *число звеньев исполнительного механизма*  $n$  и *вектор индикаторов типов шарниров*  $\sigma = \{\sigma_i\}$  размера  $(n \times 1)$ , в котором  $\sigma_i = 1$  при  $i = [\text{ВТ}]$  и  $\sigma_i = 0$  при  $i = [\text{ПТ}]$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

**Геометрические (конструктивные) параметры.** К таким параметрам (рис. 1.7) относятся *углы*  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  *установки осей смежных шарниров в исходном положении исполнительного механизма и длины*  $l_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) *звеньев исполнительного механизма.*

Углами установки осей смежных шарниров в исходном положении исполнительного механизма называют углы  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ , на которые следует повернуть  $\{\text{СК}\}_i$  последовательно вокруг осей  $X_{i-1}, Y_{i-1}, Z_{i-1}$  так, чтобы оси  $\{\text{СК}\}_{(i-1)}$  стали параллельны (сонаправлены) соответствующим осям  $\{\text{СК}\}_i$  в исходном положении  $i$ -го сочленения при значении  $\theta_i = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

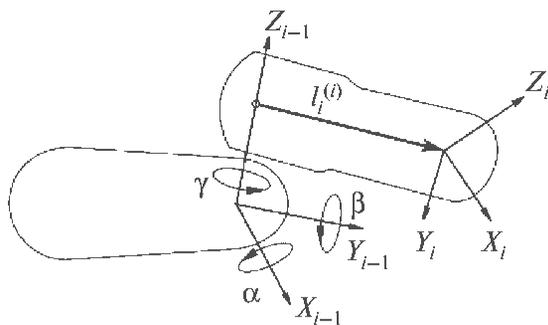


Рис. 1.7. Конструктивные параметры исполнительного механизма

Запись вида  $l_{i(j)}^{(k)}$  здесь и ниже соответствует представлению вектора, проведенного из начала  $\{CK\}_j$  в точку на звене  $i$  в проекциях на оси  $\{CK\}_k$ .

Под длиной  $l_i$   $i$ -го звена понимают вектор, проведенный из начала  $\{CK\}_{(i-1)}$  к началу  $\{CK\}_i$  в исходном положении  $i$ -го шарнира при значении  $s_i = 0$ . Вектор  $l_i$  задается в проекциях на оси  $\{CK\}_i$ :

$$l_i^{(i)} = \{l_{ix} l_{iy} l_{iz}\}^T, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

**Инерционные параметры.** К этим параметрам (рис. 1.8) относятся массы звеньев  $m_i$ , векторы координат центров масс звеньев  $r_i$  и тензоры инерции звеньев  $J_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

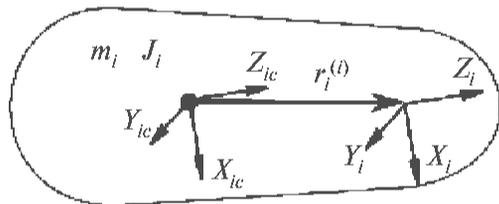


Рис. 1.8. Инерционные параметры звеньев исполнительного механизма

Вектором координат центра масс  $i$ -го звена  $r_i$  называется вектор, проведенный из начала  $\{CK\}_i$  в центр масс звена  $i$ . Вектор  $r_i$  задается в проекциях на оси  $\{CK\}_i$ :

$$r_i^{(i)} = \{r_{ix} r_{iy} r_{iz}\}^T, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Под тензором  $J_i$  инерции  $i$ -го звена в системе координат, оси которой параллельны осям  $\{CK\}_i$ , а начало совмещено с центром масс звена  $i$ , понимают матрицу размером  $(3 \times 3)$  вида

$$J_i = \begin{bmatrix} J_{ixx} & -J_{ixy} & -J_{ixz} \\ -J_{iyx} & J_{iyy} & -J_{iyz} \\ -J_{izx} & -J_{izy} & J_{izz} \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Диагональные элементы матрицы  $J_i$  — центральные, осевые моменты инерции (моменты инерции звена  $i$  относительно осей  $\{СК\}_i$ ). Недиагональные элементы называют смешанными моментами инерции. Осевые моменты инерции вычисляют по формулам (1.2), а смешанные моменты инерции находят из соотношений (1.3):

$$J_{ixx} = \sum_{vi} m_{vi} \cdot (y_{vi}^2 + z_{vi}^2), \quad J_{iyy} = \sum_{vi} m_{vi} \cdot (x_{vi}^2 + z_{vi}^2), \quad J_{izz} = \sum_{vi} m_{vi} \cdot (x_{vi}^2 + y_{vi}^2), \quad (1.2)$$

$$J_{ixy} = \sum_{vi} m_{vi} \cdot x_{vi} \cdot y_{vi} = J_{ixy}, \quad J_{ixz} = \sum_{vi} m_{vi} \cdot x_{vi} \cdot z_{vi} = J_{ixz}, \quad J_{iyz} = \sum_{vi} m_{vi} \cdot y_{vi} \cdot z_{vi} = J_{iyz}, \quad (1.3)$$

где  $m_{vi}$  — масса  $v$ -й точки  $i$ -го звена;  $x_{vi}$ ,  $y_{vi}$ ,  $z_{vi}$  — координаты этой точки ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

У большинства исполнительных механизмов тензоры инерции звеньев можно представить в виде матриц диагонального вида.

Если звенья исполнительного механизма — твердые тела, его конструктивные и инерционные параметры имеют постоянные для данного исполнительного механизма значения, если они — упругие тела, параметры (за исключением масс звеньев) зависят от параметров упругой деформации звеньев и являются переменными.

Введенные параметры полностью определяют свойства исполнительного механизма, звенья которого представляют собой абсолютно твердые тела.

## Контрольные вопросы и задания

1. Что такое исполнительный механизм манипуляционного робота?
2. Каковы основные типы кинематических схем манипуляторов?
3. Назовите параметры, определяющие кинематическую схему исполнительного механизма. Каковы геометрические параметры его звеньев?
4. Назовите инерционные параметры звеньев исполнительного механизма.
5. Что такое обобщенные координаты шарниров? Каким образом осуществляется учет типа кинематической пары?

## 2. Матрицы поворота

### 2.1. Понятие матрицы поворота

При моделировании исполнительного механизма потребуется рассмотрение векторов в различных СК, поскольку параметры звеньев такого механизма задаются в связанных СК, а уравнения его движения составляют и рассматривают в инерциальной СК. Очевидно, различные СК повернуты одна относительно другой, поэтому координаты одного и того же вектора  $a$  в разных СК не совпадут (рис. 2.1).

Пусть  $\{xyz\}$  и  $\{uvw\}$  — некоторые СК с осями  $x, y, z$  и  $u, v, w$  соответственно. Считаем, что СК  $\{uvw\}$  образована в результате поворота (или нескольких поворотов) СК  $\{xyz\}$  относительно исходного положения последней.

Системы координат  $\{xyz\}$  и  $\{uvw\}$  могут быть связаны с разными звеньями исполнительного механизма, например со смежными звеньями  $(i - 1)$  и  $i$ . При определении относительного расположения этих звеньев считается, что именно звено  $i$  поворачивается относительно звена  $(i - 1)$ , но не наоборот. Если СК  $\{xyz\}$  связана со звеном № 0, а СК  $\{uvw\}$  — со звеном  $i$ , то рассматривается поворот звена  $i$  относительно стойки.

Связь между значениями координат вектора  $a$  в СК  $\{uvw\}$  и СК  $\{xyz\}$  устанавливает соотношение

$$a^{(xyz)} = \tau_{xyz\ uvw} \cdot a^{(uvw)},$$

где  $\tau_{xyz\ uvw}$  — матрица преобразования координат вектора, заданного в СК  $\{uvw\}$ , в СК  $\{xyz\}$  после поворота СК  $\{uvw\}$  относительно СК  $\{xyz\}$ .

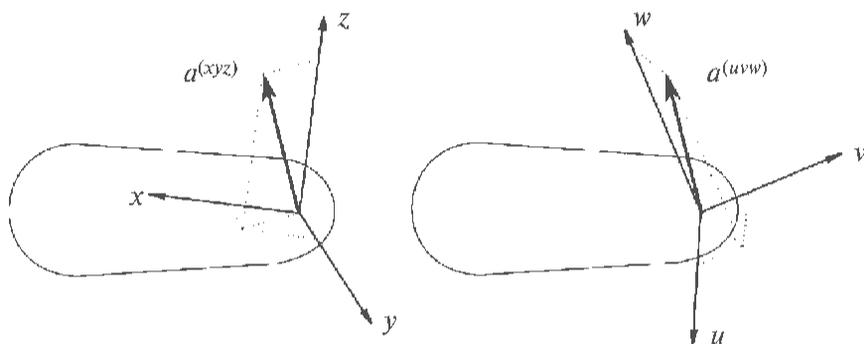


Рис. 2.1. Координаты вектора  $a$  в СК  $\{xyz\}$  и в СК  $\{uvw\}$

Матрица  $\tau_{xyz\ uvw}$  устанавливает соответствие между координатами одного и того же вектора  $a$ , но в различных СК. Получим формулы для расчета матриц преобразования  $\tau_{xyz\ uvw}$ . Вектор  $a$  в СК  $\{xyz\}$  —  $a^{(xyz)}$  и в СК  $\{uvw\}$  —  $a^{(uvw)}$  можно представить в виде

$$a^{(xyz)} = a_x \cdot i_x + a_y \cdot j_y + a_z \cdot k_z, \quad a^{(uvw)} = a_u \cdot i_u + a_v \cdot j_v + a_w \cdot k_w,$$

где  $a_x, a_y, a_z$  — проекции вектора  $a^{(xyz)}$  на оси  $x, y$  и  $z$ ;  $i_x, j_y, k_z$  — орты осей СК  $\{xyz\}$ ;  $a_u, a_v, a_w$  — проекции вектора  $a^{(uvw)}$  на оси  $u, v, w$ ;  $i_u, j_v, k_w$  — орты осей СК  $\{uvw\}$ .

Очевидно, что

$$a_x = i_x \cdot (a_u \cdot i_u + a_v \cdot j_v + a_w \cdot k_w),$$

$$a_y = j_y \cdot (a_u \cdot i_u + a_v \cdot j_v + a_w \cdot k_w),$$

$$a_z = k_z \cdot (a_u \cdot i_u + a_v \cdot j_v + a_w \cdot k_w)$$

ИЛИ

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \end{bmatrix}^T &= \begin{bmatrix} i_u \cdot i_x & j_v \cdot i_x & k_w \cdot i_x \\ i_u \cdot j_y & j_v \cdot j_y & k_w \cdot j_y \\ i_u \cdot k_z & j_v \cdot k_z & k_w \cdot k_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_u & a_v & a_w \end{bmatrix}^T = \\ &= \tau_{xyz \ uvw} \begin{bmatrix} a_u & a_v & a_w \end{bmatrix}^T. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Из выражения (2.1) видно, что столбцы матрицы преобразования  $\tau_{xyz \ uvw}$  есть проекции ортов  $i_u, j_v, k_w$  СК  $\{uvw\}$  на оси СК  $\{xyz\}$ . Таким образом, столбцы этой матрицы определяют новые координаты ортов  $i_u, j_v, k_w$  СК  $\{uvw\}$  в исходной СК  $\{xyz\}$  после поворота СК относительно СК  $\{xyz\}$ , поэтому матрицу  $\tau_{xyz \ uvw}$  можно рассматривать как оператор поворота СК  $\{uvw\}$  относительно СК  $\{xyz\}$ .

Пусть теперь в исходном положении СК  $\{uvw\}$  и СК  $\{xyz\}$  совпадают. Тогда координаты некоторого вектора  $a$  относительно СК  $\{xyz\}$ , т. е.  $a^{(xyz)}$ , и СК  $\{uvw\}$ , т. е.  $a^{(uvw)}$ , также совпадают. Пусть вектор  $a^{(uvw)}$  жестко связан с СК  $\{uvw\}$ . Как показано выше, оператор  $\tau_{xyz \ uvw}$  осуществляет поворот СК  $\{uvw\}$  относительно СК  $\{xyz\}$ . Тогда вектор  $a^{(uvw)}$  повернется вместе с СК  $\{uvw\}$ . После такого поворота координаты вектора относительно СК  $\{xyz\}$  приобретут новые значения  $a^{(xyz)}$ , т. е. это будут уже координаты повернутого относительно СК  $\{xyz\}$  вектора. В этом смысле матрицу  $\tau_{xyz \ uvw}$  можно рассматривать как оператор поворота вектора вместе со связанной с ним СК  $\{uvw\}$ .

Таким образом, матрица  $\tau_{xyz \ uvw}$  — оператор поворота СК  $\{uvw\}$  относительно СК  $\{xyz\}$  или связанных с СК  $\{uvw\}$  векторов.

Эти матрицы назовем *матрицами поворота*.

Обратные преобразования устанавливаются из рассмотрения аналогичных соотношений, а именно:

$$a_u = i_u \cdot (a_x \cdot i_x + a_y \cdot j_y + a_z \cdot k_z),$$

$$a_v = j_v \cdot (a_x \cdot i_x + a_y \cdot j_y + a_z \cdot k_z),$$

$$a_w = k_w \cdot (a_x \cdot i_x + a_y \cdot j_y + a_z \cdot k_z)$$

ИЛИ

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_u & a_v & a_w \end{bmatrix}^T &= \begin{bmatrix} i_u \cdot i_x & i_u \cdot j_y & i_u \cdot k_z \\ j_v \cdot i_x & j_v \cdot j_y & j_v \cdot k_z \\ k_w \cdot i_x & k_w \cdot j_y & k_w \cdot k_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \end{bmatrix}^T = \\ &= \tau_{uvw \ xyz} \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \end{bmatrix}^T. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Из сравнения равенств (2.1) и (2.2) следует, что

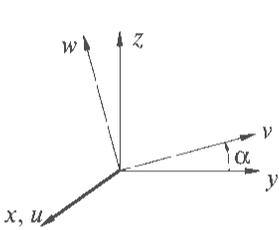
$$\tau_{uvw\ xyz} = \tau_{xyz\ uvw}^{-1} = \tau_{xyz\ uvw}^T.$$

Матрица  $\tau_{uvw\ xyz}$  преобразует координаты вектора, заданного в СК  $\{xyz\}$ , в СК  $\{uvw\}$  при повороте СК  $\{uvw\}$  относительно СК  $\{xyz\}$ . Отметим, что, как и прежде, рассматривается поворот именно СК  $\{uvw\}$  относительно СК  $\{xyz\}$ , а не наоборот. В последнем случае вектор  $a$  задан в неподвижной СК, т. е. при повороте СК  $\{uvw\}$  вектор  $a$  остается неподвижным.

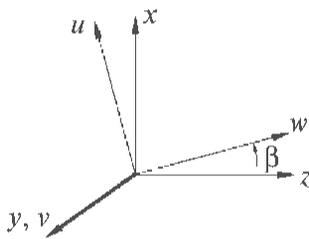
В силу того, что  $\tau_{uvw\ xyz}$  — матрица ортогонального ортонормированного преобразования,  $\det(\tau_{uvw\ xyz}) = 1$ . (Именно +1, поскольку преобразование применяется по отношению к правым СК.)

## 2.2. Матрицы элементарных поворотов

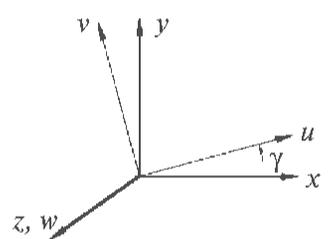
Выражения для расчета матриц поворота относительно одной координатной оси получаем, опираясь на тот факт, что столбцы матрицы преобразования  $\tau_{xyz\ uvw}$  есть проекции ортов  $i_u, j_v, k_w$  СК  $\{uvw\}$  на оси СК  $\{xyz\}$ .



**Рис. 2.2.** Поворот СК  $\{uvw\}$  вокруг оси  $x$  СК  $\{xyz\}$  на угол  $\alpha$



**Рис. 2.3.** Поворот СК  $\{uvw\}$  вокруг оси  $y$  СК  $\{xyz\}$  на угол  $\beta$



**Рис. 2.4.** Поворот СК  $\{uvw\}$  вокруг оси  $z$  СК  $\{xyz\}$  на угол  $\gamma$

Повороты СК  $\{uvw\}$  вокруг осей  $x, y, z$  на углы  $\alpha, \beta, \gamma$  иллюстрируют рис. 2.2.–2.4.

Исходя из рис. 2.2 поворот СК  $\{uvw\}$  вокруг оси  $x$  СК  $\{xyz\}$  на угол  $\alpha$  можно записать как

$$\tau_x(\alpha) = \begin{bmatrix} i_u \cdot i_x & j_v \cdot i_x & k_w \cdot i_x \\ i_u \cdot j_y & j_v \cdot j_y & k_w \cdot j_y \\ i_u \cdot k_z & j_v \cdot k_z & k_w \cdot k_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}.$$

Согласно рис. 2.3, поворот СК  $\{uvw\}$  вокруг оси  $y$  СК  $\{xyz\}$  на угол  $\beta$  можно записать как

$$\tau_y(\beta) = \begin{bmatrix} i_u \cdot i_x & j_v \cdot i_x & k_w \cdot i_x \\ i_u \cdot j_y & j_v \cdot j_y & k_w \cdot j_y \\ i_u \cdot k_z & j_v \cdot k_z & k_w \cdot k_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix}.$$

Как видно из рис. 2.4, поворот СК  $\{uvw\}$  вокруг оси  $z$  СК  $\{xyz\}$  на угол  $\gamma$  можно записать как

$$\tau_z(\gamma) = \begin{bmatrix} i_u \cdot i_x & j_v \cdot i_x & k_w \cdot i_x \\ i_u \cdot j_y & j_v \cdot j_y & k_w \cdot j_y \\ i_u \cdot k_z & j_v \cdot k_z & k_w \cdot k_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) & 0 \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Поворот СК вокруг одной из осей носит название *элементарного*.

### 2.3. Матрица композиции элементарных поворотов

Любой пространственный поворот СК можно представить как композицию трех элементарных поворотов. Так, например, если СК  $\{uvw\}$  образована в результате выполнения трех последовательных поворотов относительно СК  $\{xyz\}$ : вначале вокруг оси  $u$  (новую СК обозначим  $\{uv'w'\}$ ), после первого поворота — вокруг оси  $v'$  (новую СК обозначим  $\{u'v'w''\}$ ), после двух первых поворотов — вокруг оси  $w''$  (СК  $\{u''v''w''\}$ ), то матрица композиции этих преобразований может быть получена путем перемножения матриц элементарных поворотов:

$$\tau_{xyz \ uvw} = \tau_u(\alpha) \cdot \tau_{v'}(\beta) \cdot \tau_{w''}(\gamma),$$

$$\tau_{uvw \ xyz} = \tau_{w''}(\gamma) \cdot \tau_{v'}(\beta) \cdot \tau_u(\alpha).$$

Отметим, что последовательность элементарных поворотов может быть различной. Например, вначале вокруг оси  $v$ , затем вокруг оси  $u'$  и вокруг оси  $w''$ . Поэтому при определении матрицы композиции преобразований нужно указывать и последовательность применения элементарных преобразований.

При написании последовательности операторов поворота следует учитывать, что последовательные повороты СК  $\{uvw\}$  вместе с закрепленным в ней вектором осуществляются относительно СК  $\{xyz\}$  в заданном порядке (оси  $u$ ,  $v'$ ,  $w''$ ), но координаты векторов из СК  $\{uvw\}$  в СК  $\{xyz\}$  преобразуются в обратном порядке. Поэтому матрица первого поворота — самая первая слева (последнее преобразование вектора из СК  $\{uvw\}$  в СК  $\{xyz\}$ ), матрица последнего поворота — самая последняя слева (первое преобразование вектора из СК  $\{uvw\}$  в СК  $\{xyz\}$ ). Это иллюстрирует рис. 2.5. Пунктирной линией на рисунке показана по-

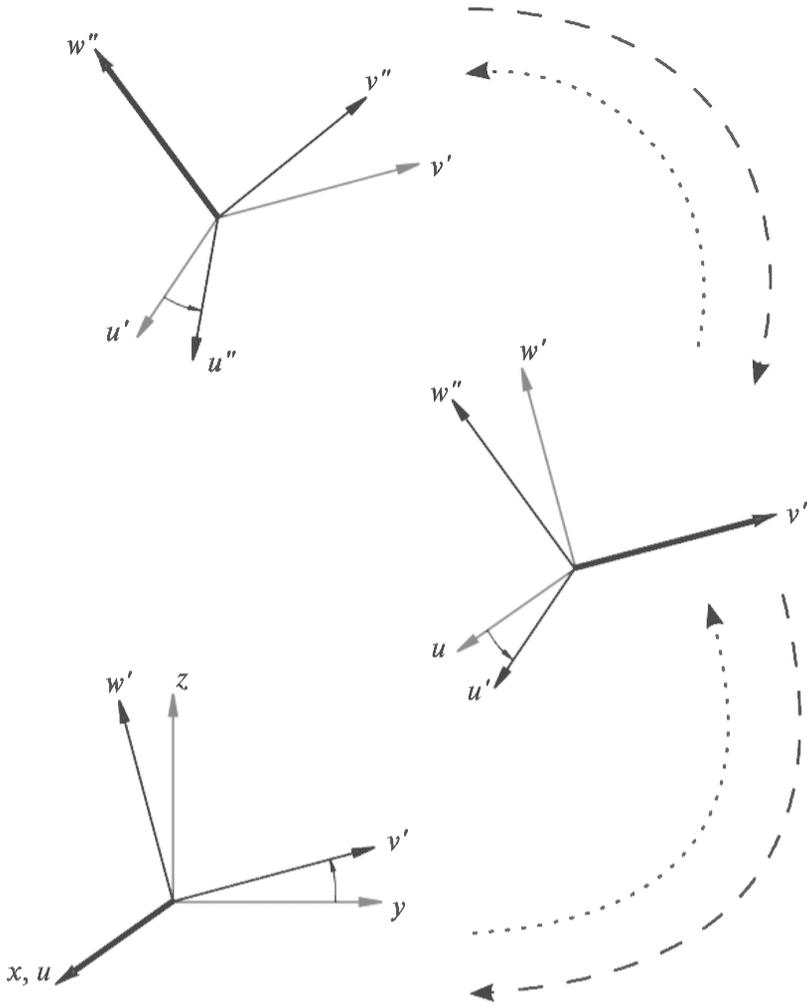


Рис. 2.5. Последовательности преобразований

следовательность поворотов СК, штриховой — последовательность преобразований векторов, заданных в подвижной СК, в неподвижную СК.

## 2.4. Матрицы поворота, используемые при записи уравнений

### *Матрица преобразования координат векторов, заданных в системах координат смежных звеньев*

Оси  $\{СК\}_i$  могут быть сонаправлены с осями  $\{СК\}_{i-1}$  в результате четырех последовательных поворотов  $\{СК\}_{i-1}$  — вокруг оси  $Z_i$  на угол  $\theta_i = \sigma_i q_i$ , затем последовательно вокруг осей  $X_i', Y_i'', Z_i'''$  на углы  $\alpha_i, \beta_i$  и  $\gamma_i$  соответственно.

Первый поворот совершается вокруг оси  $Z_i$  в момент, когда оси  $Z_i$  и  $Z_{i-1}$  совпадают. Поэтому матрицу поворота СК  $\{СК\}_i$  до обеспечения сонаправленности ее осей с осями  $\{СК\}_{i-1}$  можно записать в виде

$$\tau_{i-1} = \tau_z(\gamma_i) \cdot \tau_y(\beta_i) \cdot \tau_x(\alpha_i) \cdot \tau_z(\sigma_i \cdot q_i), \quad (2.3)$$

где  $\tau_z(\sigma_i \cdot q_i)$  — матрица преобразования поворота  $\{\text{СК}\}_{i-1}$  вокруг оси  $Z_{i-1}$  на угол  $\sigma_i q_i$ ;  $\tau_x(\alpha_i)$  — матрица преобразования поворота  $\{\text{СК}\}_{i-1}$  вокруг оси  $X_{i-1}$  (после предыдущего поворота) на угол  $\alpha_i$ ;  $\tau_y(\beta_i)$  — матрица преобразования поворота  $\{\text{СК}\}_{i-1}$  вокруг оси  $Y_{i-1}$  (после двух предыдущих поворотов) на угол  $\beta_i$ ;  $\tau_z(\gamma_i)$  — матрица преобразования поворота  $\{\text{СК}\}_{i-1}$  вокруг оси  $Z_{i-1}$  (после трех предыдущих поворотов) на угол  $\gamma_i$ .

Структура матриц  $\tau_x$ ,  $\tau_y$  и  $\tau_z$  не зависит от значений аргументов:

$$\tau_x(\cdot) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\cdot) & \sin(\cdot) \\ 0 & -\sin(\cdot) & \cos(\cdot) \end{bmatrix}, \quad \tau_y(\cdot) = \begin{bmatrix} \cos(\cdot) & 0 & -\sin(\cdot) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\cdot) & 0 & \cos(\cdot) \end{bmatrix},$$

$$\tau_z(\cdot) = \begin{bmatrix} \cos(\cdot) & \sin(\cdot) & 0 \\ -\sin(\cdot) & \cos(\cdot) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

В выражении (2.3) матрица  $\tau_z(\gamma_i) \cdot \tau_y(\beta_i) \cdot \tau_x(\alpha_i) = \text{const}$ . Обозначив

$$\varepsilon_i = \tau_z(\gamma_i) \cdot \tau_y(\beta_i) \cdot \tau_x(\alpha_i),$$

соотношение (2.3) можно представить в виде

$$\tau_{i-1} = \varepsilon_i \cdot \tau_z(\sigma_i \cdot q_i).$$

Таким образом, матрица поворота при переходе от  $\{\text{СК}\}_{i-1}$  к  $\{\text{СК}\}_i$  является функцией одной переменной —  $i$ -й обобщенной координаты исполнительного механизма  $q_i$  и четырех постоянных величин: индикатора типа  $i$ -го шарнира и трех конструктивных параметров — углов установки СК шарнира  $i$  относительно СК  $(i-1)$ -го шарнира.

Матрица  $\tau_{i-1}$  является обратной по отношению к  $\tau_{i-1}$ , т. е.  $\tau_{i-1}^{-1} = \tau_{i-1}^T = \tau_{i-1}^T$ , и может быть представлена как

$$\tau_{i-1}^{-1} = \tau_{i-1}^T = \tau^T(\sigma_i \cdot q_i) \cdot \tau_x^T(\alpha_i) \cdot \tau_y^T(\beta_i) \cdot \tau_z^T(\gamma_i) = \tau_z^T(\sigma_i \cdot q_i) \cdot \varepsilon_i^T.$$

### ***Матрица преобразования векторов координат из системы координат звена в систему координат стойки***

Поворот СК можно представить как последовательность двух и более поворотов. Тогда матрица поворота СК принимает вид произведения двух и более матриц:

$$\tau_{xyz\ uvw} = \tau_{xyz\ uvw\ (1)} \cdot \dots \cdot \tau_{xyz\ uvw\ (n-1)} \cdot \tau_{xyz\ uvw\ (n)}$$

где  $\tau_{uvw\ xyz\ (i)}$  — матрица  $i$ -го поворота (композиции элементарных поворотов или отдельного элементарного поворота).

Если, например,  $\tau_{i-1\ i}$  — матрица поворота  $\{CK\}_i$  относительно  $\{CK\}_{i-1}$ , то матрицу поворота  $\{CK\}_i$  относительно  $\{CK\}_0$  можно представить в виде

$$\tau_{0i} = \prod_{k=1}^i \tau_{k-1\ k}. \quad (2.4)$$

В выражении для  $\tau_{0i}$  по мере увеличения индекса  $k$  перемножение матриц  $\tau_{k-1\ k}$  проводится справа налево, т. е. каждая следующая матрица  $\tau_{k-1\ k}$  является первым сомножителем, иными словами,

$$\tau_{0i} = \tau_{01} \cdot \tau_{12} \cdot \tau_{23} \cdot \dots \cdot \tau_{n-1\ n}.$$

Матрица  $\tau_{0i}$  является обратной по отношению к  $\tau_{i0}$  и может быть получена из равенства:

$$\tau_{i0} = \tau_{0i}^T$$

или в развернутой форме:

$$\tau_{i0} = \prod_{k=1}^i \tau_{k\ k-1}.$$

Как и в предыдущем случае, в выражении для  $\tau_{i0}$  по мере увеличения индекса  $k$  перемножение матриц  $\tau_{k\ k-1}$  проводится справа налево.

### ***Матрица преобразования векторов координат из системы координат звена в систему координат другого звена***

По аналогии с  $\tau_{0i}$ , заменив 0 на  $i$ , а  $i$  — на  $j$ , получаем матрицу  $\tau_{ij}$  ( $j > i$ ):

$$\tau_{ij} = \tau_{i\ i+1} \cdot \tau_{i+1\ i+2} \cdot \dots \cdot \tau_{j-2\ j-1} \cdot \tau_{j-1\ j} = \prod_{k=i+1}^j \tau_{k-1\ k}.$$

В выражении для  $\tau_{ij}$  по мере увеличения индекса  $k$  перемножение матриц  $\tau_{k-1\ k}$  проводится справа налево.

Заменив 0 на  $i$ , а  $i$  — на  $j$  в  $\tau_{i0}$ , получаем матрицу  $\tau_{ji}$  ( $j > i$ ):

$$\tau_{ji} = \tau_{j\ j-1} \cdot \tau_{j-1\ j-2} \cdot \dots \cdot \tau_{i+2\ i+1} \cdot \tau_{i+1\ i} = \prod_{k=j}^{i+1} \tau_{k\ k-1}.$$

Как и в предыдущем случае, в выражении для  $\tau_{ji}$  по мере роста индекса  $k$  перемножение матриц  $\tau_{k\ k-1}$  проводится справа налево.

Очевидно, матрицы  $\tau_{ij}$  и  $\tau_{ji}$  ( $j > i$ ) связаны между собой соотношениями

$$\tau_{ji} = \tau_{ij}^{-1} = \tau_{ij}^T,$$

т. е.

$$\begin{aligned}\tau_{ji}^{-1} &= \tau_{ji}^T = (\tau_{j \ j-1} \cdot \tau_{j-1 \ j-2} \cdot \dots \cdot \tau_{i+2 \ i+1} \cdot \tau_{i+1 \ i})^T = \tau_{i+1 \ i}^T \cdot \tau_{i+2 \ i+1}^T \cdot \dots \cdot \tau_{j-1 \ j-2}^T \cdot \tau_{j \ j-1}^T = \\ &= \tau_{i \ i+1} \cdot \tau_{i+1 \ i+2} \cdot \dots \cdot \tau_{j-2 \ j-1} \cdot \tau_{j-1 \ j} = \tau_{ij},\end{aligned}$$

что действительно свидетельствует о такой связи.

## 2.5. Производные по времени матриц поворота, используемых при записи уравнений

### Понятие и свойства матрицы векторного произведения

Матрицей векторного произведения  $\lambda^*$  называется матрица размера  $(3 \times 3)$ , составленная из элементов вектора  $* = \{*_x \ *_y \ *_z\}^T$ :

$$\lambda^* = \begin{bmatrix} 0 & -*_z & *_y \\ *_z & 0 & -*_x \\ -*_y & *_x & 0 \end{bmatrix}.$$

Приведем свойства матрицы векторного произведения  $\lambda^*$ :

1) поскольку  $\lambda^*$  — кососимметрическая матрица, то

$$\lambda^T(*) = -\lambda^*;$$

2) из свойств векторного произведения для векторов  $a$  и  $b$  размера  $(3 \times 1)$  справедливо, что их векторное произведение в координатной форме записи имеет вид

$$a \times b = \lambda(a) \cdot b;$$

3) из свойств векторного произведения непосредственно следует, что

$$\lambda(a) \cdot b = -\lambda(b) \cdot a;$$

4) из свойств векторного произведения следует, что результат векторного произведения не зависит от СК, в которой оно выполнено, а значит,

$$\lambda(a^{(i)}) \cdot b^{(i)} = \tau_{i \ j} \cdot \lambda(a^{(j)}) \cdot b^{(j)} = \lambda(\tau_{i \ j} \cdot a^{(j)}) \cdot \tau_{i \ j} \cdot b^{(j)}.$$

Представленные соотношения можно переписать иначе:

$$\lambda(a^{(j)}) \cdot b^{(j)} = \tau_{j \ i} \cdot \lambda(a^{(i)}) \cdot b^{(i)} = \lambda(\tau_{j \ i} \cdot a^{(i)}) \cdot \tau_{j \ i} \cdot b^{(i)},$$

или

$$\lambda(a^{(j)}) \cdot b^{(j)} = \tau_i^{-1} \cdot \lambda(a^{(i)}) \cdot b^{(i)} = \lambda(\tau_i^{-1} \cdot a^{(i)}) \cdot \tau_i^{-1} \cdot b^{(i)},$$

или

$$\lambda(a^{(j)}) \cdot b^{(j)} = \tau_{i \ j}^T \cdot \lambda(a^{(i)}) \cdot b^{(i)} = \lambda(\tau_{i \ j}^T \cdot a^{(i)}) \cdot \tau_{i \ j}^T \cdot b^{(i)}.$$

Поскольку представленные соотношения справедливы для любого вектора  $b^{(j)}$ , символ  $b^{(j)}$  можно опустить:

$$\begin{aligned} \lambda(a^{(j)}) &= \tau_{j \ i} \cdot \lambda(\tau_{i \ j} \cdot a^{(i)}) \cdot \tau_{i \ j} = \tau_{i \ j}^{-1} \cdot \lambda(\tau_{i \ j} \cdot a^{(i)}) \cdot \tau_{i \ j} = \\ &= \tau_{i \ j}^T \cdot \lambda(\tau_{i \ j} \cdot a^{(i)}) \cdot \tau_{i \ j} \Leftrightarrow \lambda(\tau_{i \ j} \cdot a^{(i)}) = \tau_{i \ j} \cdot \lambda(a^{(i)}) \cdot \tau_{j \ i}; \end{aligned}$$

тогда очевидно соотношение

$$\lambda\left(\sum_{k=1}^i a_k^{(j)}\right) = \sum_{k=1}^i \lambda(a_k^{(j)}).$$

### ***Производная по времени матрицы преобразования векторов координат, заданных в системах координат смежных звеньев***

Производная по времени от матрицы  $\tau_{i-1i}$

$$\dot{\tau}_{i-1i} = \tau_{i-1i} \cdot \lambda(\omega_i^{(i)}), \quad (2.5)$$

где  $\omega_i^{(i)} = v_i \cdot \sigma_i \cdot \dot{q}_i$  — вектор угловой скорости звена  $i$  относительно звена  $i-1$ ;  $v_i = \varepsilon_i \cdot e = \text{const}$  — вектор, компоненты которого представляют собой проекции орта оси  $Z_{i-1}$  на оси  $\{CK\}_i$ ;  $\lambda(*)$  — матрица векторного произведения.

В справедливости выражения (2.5) нетрудно убедиться, выполнив предписанные им действия. С одной стороны (левая часть),

$$\dot{\tau}_{i-1i} = \dot{\tau}_z^T \cdot (\sigma_i \cdot q_i) \cdot \varepsilon_i^T,$$

с другой (правая часть) —

$$\begin{aligned} \tau_{i-1i} \cdot \lambda(\omega_i^{(i)}) &= \tau_z^T \cdot (\sigma_i \cdot q_i) \cdot \varepsilon_i^T \cdot \lambda(v_i) \cdot \sigma_i \cdot \dot{q}_i = \tau_z^T \cdot (\sigma_i \cdot q_i) \cdot \varepsilon_i^T \cdot \lambda(v_i) \cdot \varepsilon_i \cdot \varepsilon_i^T \cdot \sigma_i \cdot \dot{q}_i = \\ &= \tau_z^T \cdot (\sigma_i \cdot q_i) \cdot \lambda(\varepsilon_i^T \cdot v_i) \cdot \varepsilon_i^T \cdot \sigma_i \cdot \dot{q}_i = \tau_z^T \cdot (\sigma_i \cdot q_i) \cdot \lambda(e) \cdot \varepsilon_i^T \cdot \sigma_i \cdot \dot{q}_i, \end{aligned}$$

поскольку  $\varepsilon_i^T \cdot v_i = e$ .

Непосредственные вычисления убеждают в том, что

$$\tau_z^T \cdot (\sigma_i \cdot q_i) = \tau_z^T \cdot (\sigma_i \cdot q_i) \cdot \lambda(e) \cdot \sigma_i \cdot \dot{q}_i.$$

Действительно,

$$\begin{bmatrix} -\sin(\sigma_i \cdot q_i) & -\cos(\sigma_i \cdot q_i) & 0 \\ \cos(\sigma_i \cdot q_i) & -\sin(\sigma_i \cdot q_i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\sigma_i \cdot q_i) & -\sin(\sigma_i \cdot q_i) & 0 \\ \sin(\sigma_i \cdot q_i) & \cos(\sigma_i \cdot q_i) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$\dot{\tau}_z^T \cdot (\sigma_i \cdot q_i) \cdot \varepsilon_i^T = \tau_z^T \cdot (\sigma_i \cdot q_i) \cdot \lambda(e) \cdot \varepsilon_i^T \cdot \sigma_i \cdot \dot{q}_i,$$

что соответствует равенству левой и правой частей (2.5).

***Производная по времени матрицы преобразования векторов координат из системы координат звена в систему координат стойки***

Производная по времени матрицы  $\tau_{0i}$

$$\dot{\tau}_{0i} = \tau_{0i} \cdot \lambda(\omega_i^{(i)}). \quad (2.6)$$

Продифференцировав выражение (2.6), получаем

$$\dot{\tau}_{0i} = \frac{d\left(\prod_{k=1}^i \tau_{k-1 k}\right)}{dt} = \sum_{k=1}^i \tau_{0 k-1} \cdot \dot{\tau}_{k-1 k} \cdot \tau_{ki} = \tau_{0i} \cdot \lambda\left(\sum_{k=1}^i \tau_{i k} \cdot \omega_k^{(k)}\right) = \tau_{0i} \cdot \lambda(\omega_i^{(i)}).$$

Однако

$$\dot{\tau}_{0i} = \tau_{0i} \cdot \lambda(\omega_i^{(i)}) = \tau_{0i} \cdot \lambda(\tau_{i0} \cdot \omega_i^{(0)}) = \tau_{0i} \cdot \tau_{i0} \cdot \lambda(\omega_i^{(0)}) \cdot \tau_{0i} = \lambda(\omega_i^{(0)}) \cdot \tau_{0i}$$

или

$$\dot{\tau}_{0i} = \lambda(\omega_i^{(0)}) \cdot \tau_{0i}. \quad (2.7)$$

***Производная по времени матрицы преобразования векторов координат из системы координат звена в систему координат другого звена***

Выполнив действия, аналогичные приведенным выше для вычисления для матрицы  $\tau_{0i}$ , определяем производную по времени матрицы  $\tau_{ij}$ :

$$\dot{\tau}_{ij} = \tau_{ij} \cdot \lambda(\omega_j^{(j)}). \quad (2.8)$$

Продифференцировав выражение (2.8), получаем

$$\dot{\tau}_{ij} = \frac{d\left(\prod_{k=i+1}^j \tau_{k-1 k}\right)}{dt} = \sum_{k=i+1}^j \tau_{i k-1} \cdot \dot{\tau}_{k-1 k} \cdot \tau_{kj} = \tau_{ij} \cdot \lambda\left(\sum_{k=i+1}^j \tau_{jk} \cdot \omega_k^{(k)}\right) = \tau_{ij} \cdot \lambda(\omega_j^{(j)}).$$

При этом

$$\dot{\tau}_{ij} = \tau_{ij} \cdot \lambda(\omega_j^{(j)}) = \tau_{ij} \cdot \lambda(\tau_{ji} \cdot \omega_j^{(i)}) = \tau_{ij} \cdot \tau_{ji} \cdot \lambda(\omega_i^{(0)}) \cdot \tau_{ij} = \lambda(\omega_j^{(i)}) \cdot \tau_{ij}$$

или

$$\dot{\tau}_{ij} = \lambda(\omega_j^{(i)}) \cdot \tau_{ij}.$$

## Контрольные вопросы и задания

1. Что такое матрица поворота СК? Как записываются матрицы поворота вокруг одной координатной оси?
2. Как составить матрицу композиции элементарных поворотов?
3. Какие величины определяют матрицу преобразований поворота СК смежных звеньев исполнительных механизмов МР?
4. Как можно представить матрицы преобразования координат векторов, заданных в СК звеньев, в инерциальную СК?
5. Как определяются производные по времени матриц преобразования поворота СК смежных звеньев и матриц поворота СК звеньев в инерциальную СК?

### 3. Линейные координаты и углы ориентации звеньев

#### 3.1. Линейные координаты звеньев

Рассмотрим декартовы координаты точки звена  $i - 1$  в СК следующего звена  $\{СК\}_i$ , координаты точки звена  $i$  относительно начала СК предыдущего звена  $\{СК\}_{(i-1)}$  и координаты точки звена  $i$  в СК стойки  $\{СК\}_0$ .

#### *Декартовы координаты точки звена в системе координат следующего звена*

Будем считать известными координаты некоторой точки звена  $i - 1$  в  $\{СК\}_{(i-1)}$ , которые соответствуют вектору  $t_{i-1(i-1)}^{(i-1)}$  (рис. 3.1).

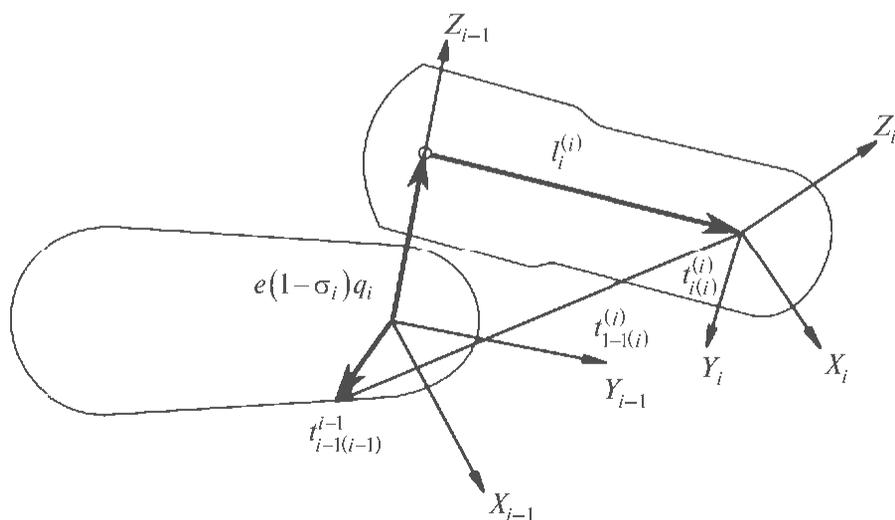


Рис. 3.1. Координаты точки звена  $i - 1$  в  $\{СК\}_i$

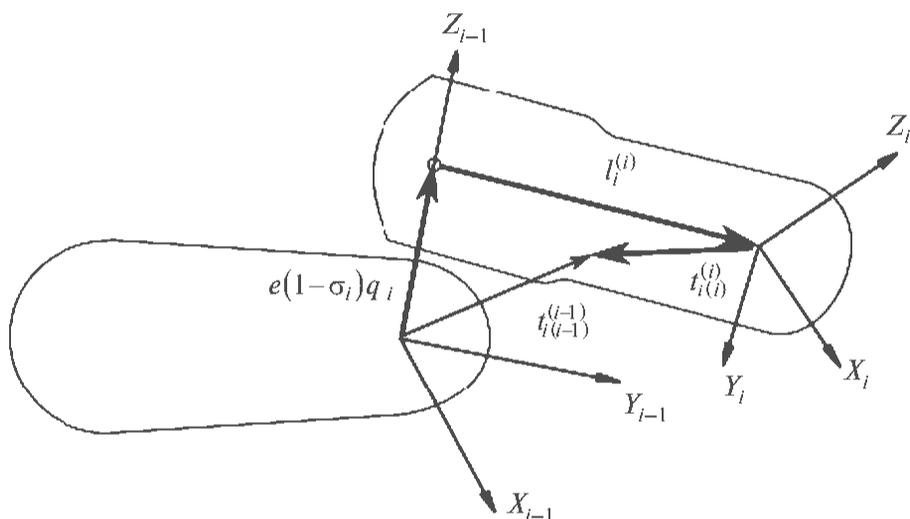
Координатами этой же точки относительно  $\{СК\}_i$  в проекциях на оси этой же СК будут компоненты вектора  $t_{i-1(i)}^{(i)}$ , проведенного из начала  $\{СК\}_i$  в рассматриваемую точку:

$$t_{i-1(i)}^{(i)} = \tau_{i-1} \cdot (t_{i-1(i-1)}^{(i-1)} - e \cdot (1 - \sigma_i) \cdot q_i) - l_i^{(i)},$$

где  $\tau_{i-1}$  — матрица поворота при переходе от  $\{СК\}_{i-1}$  к  $\{СК\}_i$ ,  $e = \{001\}^T$  — орт оси  $Z_j$  в  $\{СК\}_j$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

### ***Декартовы координаты точки звена в системе координат предыдущего звена***

Считаем, что известны координаты точки звена  $i$  в  $\{СК\}_i$ , соответствующие вектору  $t_{i(i)}^{(i)}$  (рис. 3.2).



**Рис. 3.2.** Координаты точки звена  $i$  в  $\{СК\}_{i-1}$

Координатами этой же точки относительно  $\{СК\}_{i-1}$  в этой же СК будут компоненты вектора  $t_{i-1(i-1)}^{(i-1)}$ , проведенного из начала  $\{СК\}_{i-1}$  в рассматриваемую точку:

$$t_{i-1(i-1)}^{(i-1)} = \tau_{i-1} \cdot (t_{i(i)}^{(i)} + l_i^{(i)}) + e \cdot (1 - \sigma_i) \cdot q_i, \quad (3.1)$$

где  $\tau_{i-1}$  — матрица поворота при переходе от  $\{СК\}_i$  к  $\{СК\}_{(i-1)}$ .

### ***Декартовы координаты точки звена в системе координат стойки***

Будем считать, что известны координаты точки звена  $i$  в  $\{СК\}_i$ , которые соответствуют вектору  $t_{i(i)}^{(i)}$ . Координатами этой же точки в  $\{СК\}_0$  будут компоненты вектора  $t_{i(0)}^{(0)}$ , проведенного из начала  $\{СК\}_0$  в рассматриваемую точку:

ку. Выражение для  $t_{i(0)}^{(0)}$  выводим на основе  $n$  уравнений, получаемых из (3.1) при последовательном понижении индекса  $i$  (в круглых скобках) до единицы:

$$\begin{aligned} t_{i(i-1)}^{(i-1)} &= \tau_{i-1 \ i} \cdot (t_{i(i)}^{(i)} + l_i^{(i)}) + e \cdot (1 - \sigma_i) \cdot q_i, \\ t_{i(i-2)}^{(i-2)} &= \tau_{i-2 \ i-1} \cdot (t_{i(i-1)}^{(i-1)} + l_{i-1}^{(i-1)}) + e \cdot (1 - \sigma_{i-1}) \cdot q_{i-1}, \\ &\dots \\ t_{i(2)}^{(2)} &= \tau_{2 \ 3} \cdot (t_{i(3)}^{(3)} + l_3^{(3)}) + e \cdot (1 - \sigma_3) \cdot q_3, \\ t_{i(1)}^{(1)} &= \tau_{1 \ 2} \cdot (t_{i(2)}^{(2)} + l_2^{(2)}) + e \cdot (1 - \sigma_2) \cdot q_2, \\ t_{i(0)}^{(0)} &= \tau_{0 \ 1} \cdot (t_{i(1)}^{(1)} + l_1^{(1)}) + e \cdot (1 - \sigma_1) \cdot q_1. \end{aligned}$$

Представленные соотношения имеют рекуррентный характер. Последовательно подставляя значения  $t_{i(j)}^{(j)}$  в выражения для  $t_{i(j-1)}^{(j-1)}$  ( $j = 1, \dots, i$ ), получаем

$$t_{i(0)}^{(0)} = \tau_{0 \ 1} \cdot (\tau_{1 \ 2} \cdot (\tau_{2 \ 3} \cdot (\dots \tau_{i-2 \ i-1} \cdot (\tau_{i-1 \ i} \cdot (t_{i(i)}^{(i)} + l_i^{(i)}) + e \cdot (1 - \sigma_i) \cdot q_i + l_{i-1}^{(i-1)}) + e \cdot (1 - \sigma_{i-1}) \cdot q_{i-1} + \dots + l_3^{(3)}) + e \cdot (1 - \sigma_3) \cdot q_3 + l_2^{(2)}) + e \cdot (1 - \sigma_2) \cdot q_2 + l_1^{(1)}) + e \cdot (1 - \sigma_1) \cdot q_1,$$

или сокращенно

$$t_{i(0)}^{(0)} = \tau_{0i} \cdot t_{i(i)}^{(i)} + \sum_{j=1}^i (\tau_{0 \ j-1} \cdot e \cdot (1 - \sigma_j) \cdot q_j + \tau_{0j} \cdot l_j^{(j)}),$$

где  $\tau_{0j} = \tau_{01} \cdot \tau_{12} \cdot \tau_{23} \cdot \dots \cdot \tau_{j-2 \ j-1} \cdot \tau_{j-1 \ j} = \prod_{k=1}^j \tau_{k-1 \ k}$  — матрица поворота при переходе от  $\{\text{СК}\}_j$  к  $\{\text{СК}\}_0$ .

Последнее выражение можно переписать как

$$t_{i(0)}^{(0)} = \tau_{0i} \cdot t_{i(i)}^{(i)} + \sum_{j=1}^i \tau_{0j} \cdot (v_j \cdot (1 - \sigma_j) \cdot q_j + l_j^{(j)}), \quad (3.2)$$

где  $v_j$  — вектор, компоненты которого представляют собой проекции орта оси  $Z_{j-1}$  на оси  $\{\text{СК}\}_j$ . Его вычисляют по соотношению

$$v_j = \tau_{j \ j-1} \cdot e = \varepsilon_j \cdot \tau_z (\sigma_j \cdot q_j) \cdot e = \varepsilon_j \cdot e = \text{const}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Выражение (3.2) можно записать следующим образом:

$$t_{i(0)}^{(0)} = \tau_{0i} \cdot t_{i(i)}^{(i)} + \sum_{j=1}^i \tau_{0j} \cdot L_j,$$

где  $L_j$  — вектор длины  $j$ -го звена с учетом перемещений в кинематической паре ПТ,

$$L_j = v_j \cdot (1 - \sigma_j) \cdot q_j + l_j^{(j)}.$$

Вектор (3.2) в проекциях на оси  $\{СК\}_i$  запишем так:

$$t_{i(0)}^{(i)} = t_{i(i)}^{(i)} + \sum_{j=1}^i \tau_{ij} \cdot (v_j \cdot (1 - \sigma_j) \cdot q_j + l_j^{(j)}) \quad (3.3)$$

или

$$t_{i(0)}^{(i)} = t_{i(i)}^{(i)} + \sum_{j=1}^i \tau_{ij} \cdot L_j.$$

Выражение (3.3) позволяет определить векторы, проведенные из начала  $\{СК\}_0$  к точкам на звеньях исполнительного механизма, в проекциях на оси СК этих звеньев, а (3.2) — эти же векторы в проекциях на оси СК стойки.

### 3.2. Углы ориентации звеньев относительно системы координат стойки

Ориентацию СК звеньев относительно СК стойки исполнительного механизма МР устанавливают по матрицам  $\tau_{0i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Элементами матриц  $\tau_{0i}$  являются косинусы углов между одноименными осями СК звеньев и СК стойки. Поэтому первые столбцы этих матриц — проекции ортов осей  $X\{СК\}_i$  на оси  $\{СК\}_0$ , вторые столбцы — проекции ортов осей  $Y\{СК\}_i$  на оси  $\{СК\}_0$ , третьи — проекции ортов осей  $Z\{СК\}_i$  на оси  $\{СК\}_0$ .

На практике неудобно определять относительную ориентацию осей СК, рассматривая значения косинусов углов между осями соответствующих СК. Представление об окружающей действительности человеку более удобно отображать в форме расстояний и углов, поэтому для определения взаимной ориентации осей СК применяют угловые параметры, более привычные для восприятия.

Ранее были получены формулы для расчета линейных координат точек на звеньях. Однако они не полностью отражают положение звена исполнительного механизма МР в пространстве. Для полного представления о нем необходимо определить ориентацию СК звена относительно СК стойки в удобном для восприятия виде. В теоретической механике для этого предлагается применять угловые координаты. Для определения ориентации СК звеньев относительно  $\{СК\}_0$  применяют углы Эйлера (рис. 3.3) — *рысканье* (yaw), *тангаж* (pitch) и *крен* (roll).

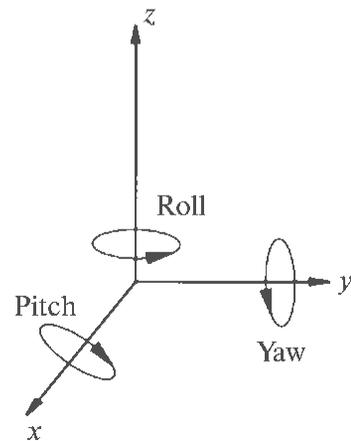


Рис. 3.3. Углы Эйлера

Предполагается, что ориентацию СК звена относительно СК стойки можно определить исходя из того, что СК звена образовалась в результате трех поворотов из положения, когда оси СК звена и  $\{СК\}_0$  были сонаправлены, т. е. связанная со звеном СК повернута из исходного положения, совпадающего с СК стойки, до ее фактического положения. Каждый из поворотов осуществляется на определенный угол.

Преобразование поворота подвижной СК  $\{uvw\}$  относительно трех осей СК стойки  $\{xyz\}$  представляется в виде композиции из трех элементарных поворотов — вокруг оси  $u$  на угол тангажа  $P$ , затем вокруг оси  $v'$  на угол рысканья  $Y$  и после вокруг оси  $w''$  на угол крена  $R$ :

$$\tau_{xyz\ uvw} = \tau_u(P) \cdot \tau_{v'}(Y) \cdot \tau_{w''}(R).$$

Аналогично для определения ориентации  $\{СК\}_i$  относительно  $\{СК\}_0$  используют значения трех углов ( $R, Y, P$ ). Рассмотрим выражения для определения рысканья, тангажа и крена ориентации  $i$ -го звена относительно СК стойки.

С одной стороны,

$$\tau_{0i} = \tau_u(P) \cdot \tau_{v'}(Y) \cdot \tau_{w''}(R), \quad (3.4)$$

с другой —

$$\tau_{0i} = \prod_{k=1}^i \tau_{k-1\ k} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

Значения  $\tau_{k-1\ k}$  полагаются известными, поэтому известна и матрица  $\tau_{0i}$ .

Умножив слева правые и левые части равенства (3.4) на транспонированную матрицу элементарного поворота  $\tau_u(P)^T$ , получаем

$$\tau_u(P)^T \cdot \tau_{0i} = \tau_u(P)^T \cdot \tau_u(P) \cdot \tau_{v'}(Y) \cdot \tau_{w''}(R),$$

$$\tau_u(P)^T \cdot \tau_{0i} = \tau_{v'}(Y) \cdot \tau_{w''}(R).$$

Выполнив действия, предписанные соотношением (3.5), последнее выражение можно переписать таким образом:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos P & \sin P \\ 0 & -\sin P & \cos P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos Y & 0 & \sin Y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin Y & 0 & \cos Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos R & -\sin R & 0 \\ \sin R & \cos R & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Перемножение матриц в правой и левой частях равенства дает следующий результат:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} \cos P + t_{31} \sin P & t_{22} \cos P + t_{32} \sin P & t_{23} \cos P + t_{33} \sin P \\ t_{32} \cos P - t_{22} \sin P & t_{32} \cos P - t_{22} \sin P & t_{33} \cos P - t_{23} \sin P \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} \cos Y \cos R & -\cos Y \sin R & \sin Y \\ \sin R & \cos R & 0 \\ -\sin Y \sin R & \sin Y \cos R & \cos Y \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Сравнивая третьи элементы во вторых строках матриц в левой и правой частях, получаем равенство

$$t_{23} \cos P + t_{33} \sin P = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin P}{\cos P} = -\frac{t_{23}}{t_{33}} \Leftrightarrow P = \operatorname{arctg}\left(-\frac{t_{23}}{t_{33}}\right).$$

Далее, сравнивая третьи элементы в первых строках и третьих в третьих строках матриц в левой и правой частях, справедливо записать равенства:

$$\begin{aligned} & t_{13} = \sin Y \quad \cap \quad t_{33} \cos P - t_{23} \sin P = \cos Y \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & \frac{\sin Y}{\cos Y} = \frac{t_{13}}{t_{33} \cos P - t_{23} \sin P} \Leftrightarrow Y = \operatorname{arctg}\left(\frac{t_{13}}{t_{33} \cos P - t_{23} \sin P}\right). \end{aligned}$$

Наконец, равенства

$$\begin{aligned} & t_{21} \cos P + t_{31} \sin P = \sin R \quad \cap \quad t_{22} \cos P + t_{32} \sin P = \cos R \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & \frac{\sin R}{\cos R} = \frac{t_{21} \cos P + t_{31} \sin P}{t_{22} \cos P + t_{32} \sin P} \Leftrightarrow R = \operatorname{arctg}\left(\frac{t_{21} \cos P + t_{31} \sin P}{t_{22} \cos P + t_{32} \sin P}\right) \end{aligned}$$

получаем, сравнивая первые и вторые элементы во вторых строках матриц в левой и правой частях соответственно.

## Контрольные вопросы и задания

1. Как представить координаты точки звена в СК предыдущего звена и базы исполнительного механизма МР?

2. Как определяется ориентация звеньев МР относительно инерциальной СК?

## 4. Прямая и обратная позиционные кинематические задачи

### 4.1. Прямая позиционная кинематическая задача

**Понятие задачи.** В ходе решения различных задач проектирования исполнительных механизмов МР и их подсистем, а также при управлении ими в реальном времени необходимо определять положение и ориентацию звеньев МР, равно как и положение и ориентацию ЗУМ относительно базовой СК.

Определение линейных координат точек на звеньях и ориентации СК звеньев относительно базовой СК, а также определение углов Эйлера при заданных значениях координат шарниров и заданных параметрах звеньев исполнительного механизма носит название *прямой позиционной кинематической задачи*. Часто применяют термин *прямая кинематическая задача* (ПКЗ). Прямая позиционная кинематическая задача всегда имеет решение и притом единственное.

**Постановка задачи.** Прямая позиционная кинематическая задача имеет общий алгоритм действий, который не зависит от вида исполнительного механизма. Решение ее выражается уравнениями, которые можно получить из выведенных ранее равенств (2.4) и (3.3). Для этого нужно добавить поворот  $\{СК\}_{ЗУМ}$  относительно  $\{СК\}_n$  и заменить произвольное звено  $i$  последним звеном  $n$ , а произвольную точку  $i$ -го звена  $t_{i(i)}^{(i)}$  — точкой крепления ЗУМ  $I_{ЗУМ(ЗУМ)}^{(ЗУМ)}$ . Получаем

$$\tau_{0 \text{ ЗУМ}} = \prod_{k=1}^n \tau_{k-1 \text{ } k} \cdot \tau_{n \text{ ЗУМ}},$$

$$I_{ЗУМ(0)}^{(0)} = \tau_{0 \text{ ЗУМ}} \cdot I_{ЗУМ(ЗУМ)}^{(ЗУМ)} + \sum_{j=1}^n \tau_{0j} \cdot L_j.$$

Известны следующие параметры:

- значения координат шарниров  $q_1, q_2, \dots, q_n$  исполнительного механизма;
- векторы длин звеньев, связывающие начала СК смежных звеньев; векторы заданы проекциями на оси соответствующих связанных СК —  $I_i^{(i)}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ );
- линейные координаты ЗУМ МР относительно СК последнего звена  $n$  в проекциях на оси  $\{СК\}_{ЗУМ}$  — вектор  $I_{ЗУМ(ЗУМ)}^{(ЗУМ)}$ ;
- три угла поворота системы координат ЗУМ МР относительно СК последнего звена  $n$  —  $\alpha_{ЗУМ(n)}, \beta_{ЗУМ(n)}, \gamma_{ЗУМ(n)}$  или матрица поворота  $\{СК\}_{ЗУМ}$  относительно  $\{СК\}_n$  —  $\tau_{n \text{ ЗУМ}}$ ;
- кинематическая схема исполнительного механизма МР или матрицы перехода между СК звеньев исполнительного механизма  $\varepsilon_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

Требуется определить:

- линейные координаты ЗУМ МР относительно базовой СК в проекциях на оси  $\{СК\}_B$  — вектор  $l_{ЗУМ(B)}^{(B)}$ ;
- три угла поворота системы координат ЗУМ МР относительно базовой СК —  $\alpha_{ЗУМ(B)}$ ,  $\beta_{ЗУМ(B)}$ ,  $\gamma_{ЗУМ(B)}$  и матрицу поворота  $\{СК\}_{ЗУМ}$  относительно  $\{СК\}_B$  —  $\tau_{BЗУМ}$ .

Пример решения прямой позиционной кинематической задачи приведен в приложении 1.

## 4.2. Обратная позиционная кинематическая задача

**Понятие задачи.** Обратная задача кинематики, как и прямая задача о положении, является одной из основных задач кинематического анализа и синтеза манипуляторов. Управление МР, как правило, осуществляется в пространстве обобщенных координат, а координаты объектов манипулирования задаются в некоторой базовой системе. Таким образом, при разработке алгоритмов управления положением и ориентацией ЗУМ возникает необходимость получения решения обратной задачи.

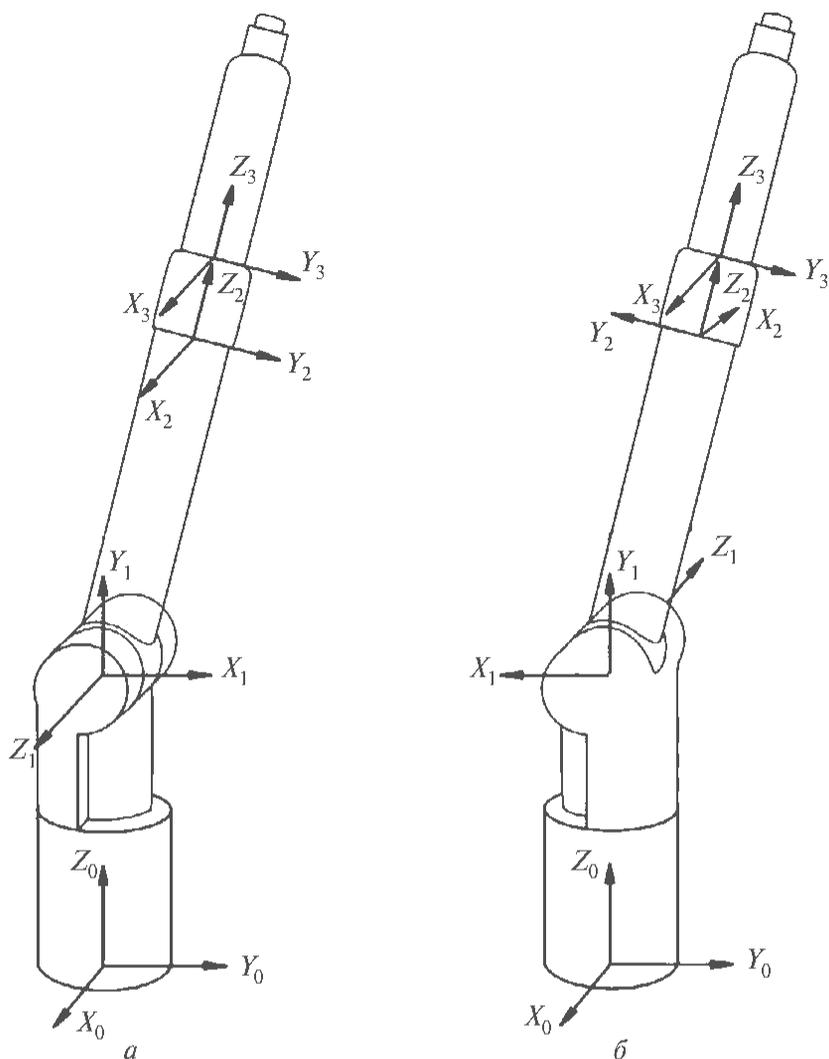
Определение координат сочленений по заданным линейным координатам ЗУМ и углам его ориентации относительно базовой СК при известных параметрах звеньев исполнительных механизмов носит название *обратной кинематической задачи о положении исполнительных механизмов*, или *обратной позиционной кинематической задачи (ОПКЗ)*. Часто применяют термин *обратная кинематическая задача (ОКЗ)*.

В общей постановке для многих исполнительных механизмов ОПКЗ может иметь несколько решений, бесчисленное их множество или не иметь ни одного решения.

Первый случай (несколько решений) связан с тем, что одному и тому же положению и ориентации ЗУМ относительно базовой СК может соответствовать несколько разных наборов значений координат шарниров (рис. 4.1). Одной и той же позе (т. е. положению и ориентации) ЗУМ изображенного на рис. 4.1 исполнительного механизма соответствуют два набора значений координат шарниров:  $q_1 = 0$ ;  $q_2 = -30^\circ$ ;  $q_3 = 0$  (рис. 4.1, а) и  $q_1 = 180^\circ$ ;  $q_2 = 30^\circ$ ;  $q_3 = 180^\circ$  (рис. 4.1, б).

Второй случай (бесчисленное множество решений) соответствует сингулярным конфигурациям кинематической цепи.

Третий случай (ни одного решения) связан с ограничениями рабочей зоны вследствие конструктивных ограничений возможных значений координат сочленений и геометрических параметров звеньев исполнительного механизма. Так, робот не способен дотянуться до точки, расстояние до которой больше суммарной длины всех звеньев исполнительного механизма.



**Рис. 4.1.** Два решения обратной кинематической задачи для одной и той же позы захватного устройства манипулятора

Для обеспечения единственности решения ОКЗ применяют специальные меры. В целях исключения варианта без решений траектории перемещения ЗУМ планируют так, чтобы не допустить выхода углов шарниров за ограничения. Во избежание бесчисленного множества решений планирование траекторий перемещения ЗУМ осуществляют по плану, исключающему попадание в сингулярные конфигурации кинематической цепи. Если ОКЗ имеет несколько решений («неоднозначный» случай), для обеспечения единственности решения в рассмотрение вводят дополнительные параметры — индексы конфигурации кинематической цепи.

**Постановка задачи.** Обратная кинематическая задача не имеет общего подхода к решению и для каждого вида исполнительного механизма решается уникально.

В общем случае известны следующие величины:

- линейные координаты ЗУМ относительно базовой СК в проекциях на оси  $\{СК\}_0$  — вектор  $l_{ЗУМ(0)}^{(0)}$ ;
- три угла поворота системы координат ЗУМ относительно базовой СК —  $\alpha_{ЗУМ(0)}$ ,  $\beta_{ЗУМ(0)}$ ,  $\gamma_{ЗУМ(0)}$  или матрица поворота  $\{СК\}_{ЗУМ}$  относительно  $\{СК\}_0$  —  $\tau_{0\ ЗУМ}$ ;
- линейные координаты ЗУМ относительно СК последнего звена  $n$  — вектор  $l_{ЗУМ\ ЗУМ}^{(ЗУМ)}$ ;
- три угла поворота системы координат ЗУМ относительно СК последнего звена  $n$  —  $\alpha_{ЗУМ(n)}$ ,  $\beta_{ЗУМ(n)}$ ,  $\gamma_{ЗУМ(n)}$  или матрица поворота  $\{СК\}_{ЗУМ}$  относительно  $\{СК\}_n$  —  $\tau_{n\ ЗУМ}$ ;
- векторы длин звеньев, связывающие начала СК смежных звеньев, заданные проекциями на оси соответствующих связанных СК —  $l_i^{(i)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ;
- индексы конфигурации кинематической цепи —  $KCI$ .

Требуется определить значения координат шарниров исполнительного механизма  $q_1, q_2, \dots, q_n$ .

**Сингулярные конфигурации кинематической цепи.** Сингулярной называется такая конфигурация кинематической цепи исполнительного механизма МР, когда одним и тем же значениям координат ЗУМ соответствует бесчисленное множество значений координат сочленений.

Как правило, решение ОКЗ в окрестностях сингулярной конфигурации кинематической цепи возвращает в качестве решения углы шарниров такие, что при прохождении внутренней сингулярной точки могут потребоваться недостижимо высокие скорости вращения в отдельных сочленениях.

Рассмотрим случай сингулярной конфигурации на конкретном примере.

Для изображенного на рис. 4.1 исполнительного механизма это конфигурация, когда все звенья вытянуты в линию. При этом оси  $Z_3$  и  $Z_0$  образуют ось вращения участка кинематической цепи между первым и третьим шарнирами. Этот участок может без ограничений вращаться вокруг своей вертикальной оси, что соответствует неограниченному множеству значений углов первого и третьего шарниров.

**Индексы конфигурации кинематической цепи.** Под индексами конфигурации кинематической цепи ( $KCI$ ) понимают параметры, позволяющие однозначно определить значения координат шарниров. Выбор этих параметров зависит от вида кинематической схемы исполнительного механизма и алгоритма решения ОКЗ. Чаще всего алгоритм выбора  $KCI$  носит эвристический характер.

Например, для изображенного на рис. 4.2 исполнительного механизма в качестве таких параметров используют значения трех индексов конфигурации кинематической цепи — плеча ( $k_s$ ), локтя ( $k_e$ ) и запястья ( $k_w$ ).

$KCI$  плеча  $k_s$  определяется следующим образом:

- «плечо впереди» ( $k_s = +1$ ) — поворот плеча вокруг оси  $Z_1$  в положительном направлении приводит к движению шарнира запястья от оси второго звена (см. рис. 4.2, а);

- «плечо сзади» ( $k_s = -1$ ) — поворот плеча вокруг оси  $Z_1$  в положительном направлении приводит к движению запястья по направлению к оси второго звена (см. рис. 4.2, б).

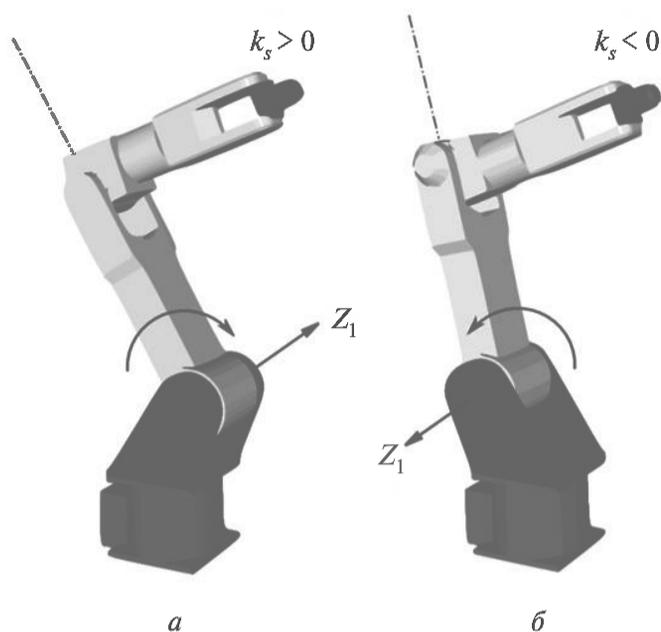


Рис. 4.2. Определение коэффициента КСИ плеча  $k_s$ :  
 а — «плечо впереди»; б — «плечо сзади»

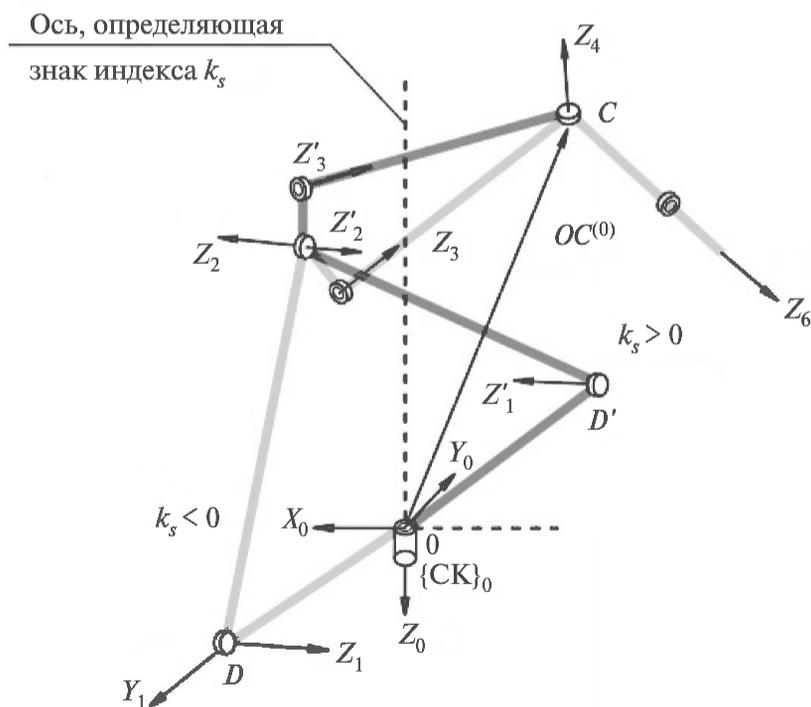


Рис. 4.3. Точное определение коэффициента КСИ плеча  $k_s$

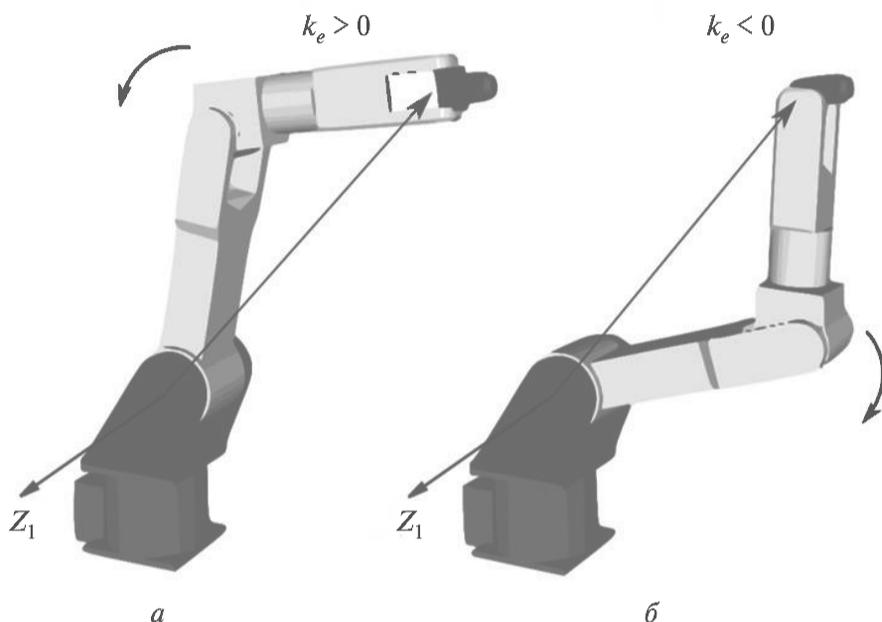
Точнее  $k_s$  определяется (рис. 4.3) по формуле

$$k_s = \text{sgn} \left[ \left( \overline{OC}^{(0)} \times Z_0^{(0)} \right) \cdot Z_1^{(0)} \right].$$

*KCI* локтя  $k_e$  находится следующим образом:

- «локоть вверх» ( $k_e = +1$ ) — при взгляде с конца оси  $Z_1$  шарнира тангажа плеча шарнир локтя указывает вращение против часовой стрелки (рис. 4.4, *a*);

- «локоть вниз» ( $k_e = -1$ ) — при взгляде с конца оси  $Z_1$  шарнира тангажа плеча шарнир локтя указывает вращение по часовой стрелке (рис. 4.4, *б*).



**Рис. 4.4.** Определение коэффициента *KCI* локтя  $k_e$ :

*a* — «локоть вверх»; *б* — «локоть вниз»

Точнее  $k_e$  можно определить (рис. 4.5) по формуле

$$k_e = \text{sgn} \left[ \left( X_2^{(0)} \times Z_3^{(0)} \right) \cdot Z_1^{(0)} \right].$$

*KCI* запястья  $k_w$  находится следующим образом:

- «запястье вперед» ( $k_w = +1$ ) — положительное вращение вокруг оси  $Z_4$  шарнира рысканья кисти приводит к разгибанию кисти (рис. 4.6, *a*);

- «запястье назад» ( $k_e = -1$ ) — положительное вращение вокруг оси  $Z_4$  шарнира рысканья кисти приводит к сгибанию кисти (рис. 4.6, *б*).

Точнее  $k_w$  определяется (рис. 4.7) по формуле

$$k_w = \text{sgn} \left[ Z_4 \cdot (Z_6 \times Z_3) \right].$$

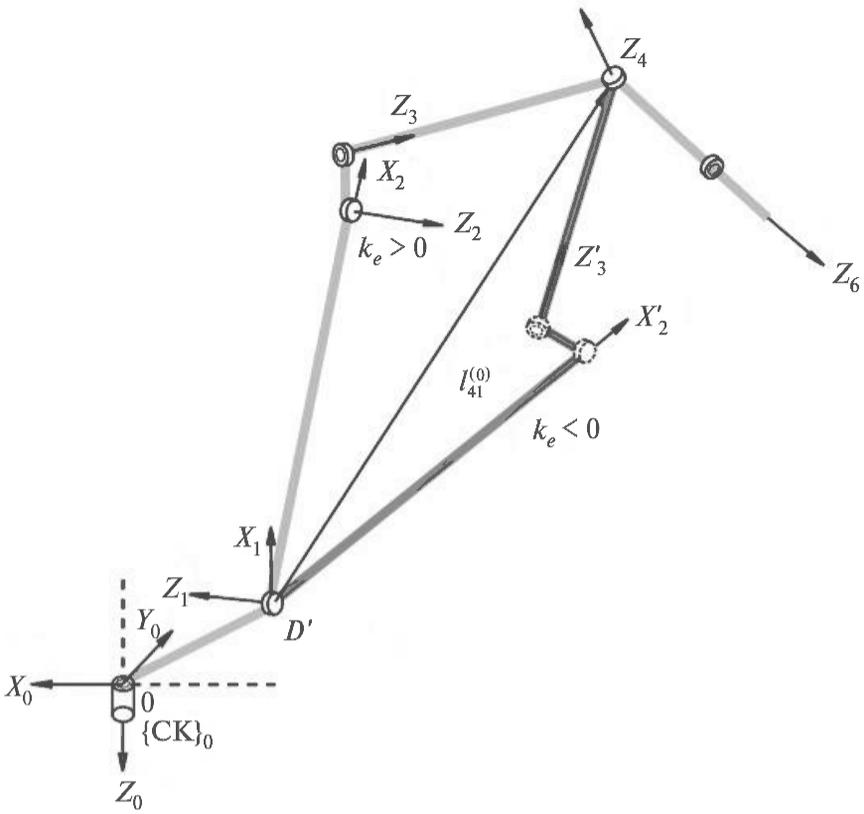


Рис. 4.5. Точное определение коэффициента КСИ локтя  $k_e$

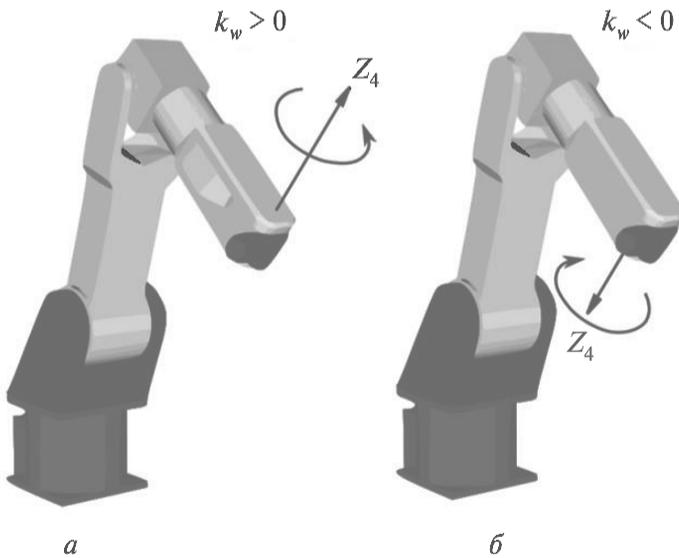
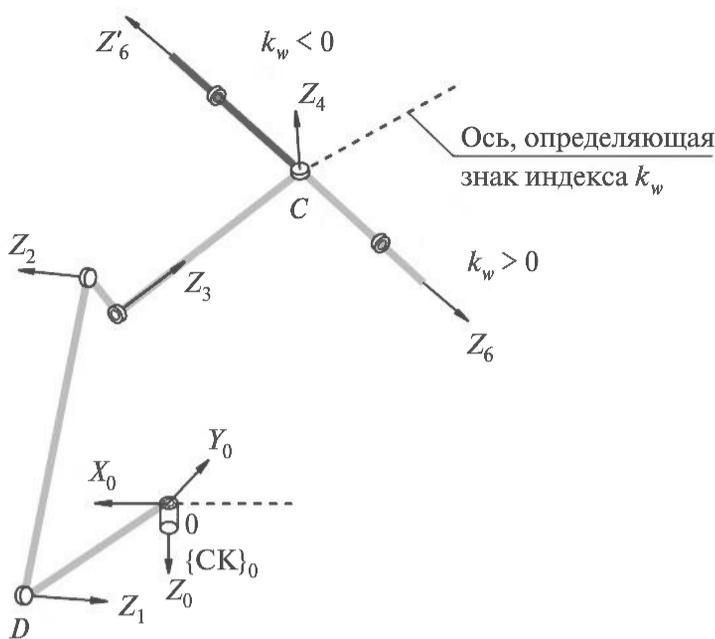


Рис. 4.6. Определение коэффициента КСИ кисти  $k_w$ :  
*a* — «запястье вперед»; *б* — «запястье назад»



**Рис. 4.7.** Точное определение коэффициента *KCI* запястья  $k_w$

Значения индексов *KCI* необходимо учитывать при расчете алгоритмов управления МР, поскольку сохранение фиксированных значений индексов может привести к резкому изменению углов поворота и угловых скоростей движения шарниров при прохождении кинематических внутренних сингулярных точек.

## Контрольные вопросы и задания

1. В чем состоит понятие прямой и обратной позиционных кинематических задач?
2. Что такое сингулярности обратной кинематической задачи?
3. Какие меры применяются для обеспечения единственности решения обратной позиционной кинематической задачи?
4. Как происходит решение обратной позиционной кинематической задачи?

## 5. Угловые и линейные скорости звеньев

### 5.1. Угловые скорости звеньев

Учитывая, что смежные звенья исполнительных механизмов могут вращаться (или перемещаться) в направлении только одной оси, нетрудно записать соотношения для определения векторов относительных угловых скоростей звеньев. Вектор угловой скорости вращения звена  $i$  относительно звена  $i - 1$  в проекциях на оси  $\{CK\}_{i-1}$  выражаем уравнением

$$\omega_i^{(i-1)} = e \cdot \sigma_i \cdot \dot{q}_i, \quad i=1, 2, \dots, n,$$

где  $\dot{q}_i$  — производная по времени координаты  $q_i$ .

Соотношения для определения угловых скоростей звеньев  $\omega_i^{(i)}$  в проекциях на оси  $\{CK\}_i$  записываем в виде

$$\omega_i^{(i)} = \tau_{i \ i-1} \cdot e \cdot \sigma_i \cdot \dot{q}_i = v_i \cdot \sigma_i \cdot \dot{q}_i, \quad i=1, 2, \dots, n.$$

Вектор относительной угловой скорости  $\omega_i^{(0)}$  в проекциях на оси  $\{CK\}_0$  выражаем уравнением

$$\omega_i^{(0)} = \tau_{0i} \cdot v_i \cdot \sigma_i \cdot \dot{q}_i, \quad i=1, 2, \dots, n.$$

Каждое последующее звено исполнительного механизма участвует во вращении всех предыдущих, поэтому верно равенство

$$\omega_i^{(0)} = \sum_{j=1}^i \omega_j^{(0)} = \sum_{j=1}^i \tau_{0j} \cdot \omega_j^{(j)}, \quad i=1, 2, \dots, n, \quad (5.1)$$

или в развернутой форме

$$\omega_i^{(0)} = \sum_{j=1}^i \tau_{0j} \cdot v_j \cdot \sigma_j \cdot \dot{q}_j, \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (5.2)$$

Вектор относительной угловой скорости  $\omega_i^{(i)}$  в проекциях на оси  $\{CK\}_i$  имеет вид

$$\omega_i^{(i)} = \sum_{j=1}^i \omega_j^{(i)} = \sum_{j=1}^i \tau_{ij} \cdot \omega_j^{(j)}, \quad i=1, 2, \dots, n, \quad (5.3)$$

или в развернутой форме

$$\omega_i^{(i)} = \sum_{j=1}^i \tau_{ij} \cdot v_j \cdot \sigma_j \cdot \dot{q}_j, \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (5.4)$$

Выражениям для определения угловых скоростей можно придать более компактный и удобный для оперирования вид, если использовать блочные матрицы.

## 5.2. Понятие и свойства векторов $c_j^{(0)}$ и $c_j^{(i)}$

Вводим обозначения

$$c_j^{(0)} = \tau_{0j} \cdot v_j \cdot \sigma_j, \quad (5.5)$$

$$c_j^{(i)} = \tau_{ij} \cdot v_j \cdot \sigma_j.$$

Очевидно, что  $c_j^{(0)}$ ,  $c_j^{(i)}$  — векторы размера  $(3 \times 1)$ .

Свойства вектора  $c_j^{(0)}$ :

1)  $c_j^{(0)}$  — орт оси  $Z_{j-1}$ , спроецированный на оси  $\{СК\}_0$ , так как  $v_j$  — это вектор проекций оси  $Z_{j-1}$  на оси  $\{СК\}_j$ ;

2)  $c_j^{(0)} = 0$  при  $j = [ПТ]$  ввиду того, что в выражение для  $c_j^{(0)}$  входит  $\sigma_j$ ;

3)  $|c_j^{(0)}| = 1$  при  $j = [ВТ]$ , поскольку  $c_j^{(0)}$  — проекции единичного вектора на оси  $\{СК\}_0$ .

Свойства вектора  $c_j^{(i)}$ :

1)  $c_j^{(i)}$  — орт оси  $Z_{j-1}$ , спроецированный на оси  $\{СК\}_i$ , так как  $v_j$  — это вектор проекций оси  $Z_{j-1}$  на оси  $\{СК\}_j$ ;

2)  $c_j^{(i)} = 0$  при  $j = [ПТ]$  ввиду того, что в выражение для  $c_j^{(i)}$  входит  $\sigma_j$ ;

3)  $|c_j^{(i)}| = 1$  при  $j = [ВТ]$ , поскольку  $c_j^{(i)}$  — проекции единичного вектора на оси  $\{СК\}_i$ .

### 5.3. Матрицы Якоби угловых скоростей звеньев

В соответствии с введенными в 5.2 обозначениями соотношения для расчета  $\omega_i^{(0)}$  и  $\omega_i^{(i)}$  из выражений (5.2) и (5.4) можно переписать:

$$\omega_i^{(0)} = \sum_{j=1}^i c_j^{(0)} \cdot \dot{q}_j, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (5.6)$$

$$\omega_i^{(i)} = \sum_{j=1}^i c_j^{(i)} \cdot \dot{q}_j, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.7)$$

Вводим в рассмотрение вектор  $q = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}^T$ , составленный из обобщенных координат исполнительного механизма. Тогда соотношения для расчета  $\omega_n^{(0)}$  и  $\omega_n^{(n)}$ , полученные из равенств (5.6) и (5.7), имеют вид

$$\omega_n^{(0)} = C_n^{(0)} \cdot \dot{q},$$

$$\omega_n^{(n)} = C_n^{(n)} \cdot \dot{q},$$

где  $C_n^{(0)} = [c_1^{(0)} \quad c_2^{(0)} \quad \dots \quad c_n^{(0)}]$ ,  $C_n^{(n)} = [c_1^{(n)} \quad c_2^{(n)} \quad \dots \quad c_n^{(n)}]$  — матрицы, составленные из векторов  $c_j^{(0)}$  и  $c_j^{(n)}$ , имеющие размер  $(3 \times n)$ .

Матрицы  $C_n^{(0)}$  и  $C_n^{(n)}$  линейно связывают между собой векторы производных по времени обобщенных координат исполнительного механизма и угловых скоростей его последних  $n$ -х звеньев. Аналогично можно построить матрицы  $C_i^{(0)}$  и  $C_i^{(i)}$  для любых других звеньев. В этом случае размер вектора  $q$  —  $(i \times 1)$ , т. е. он составляется из обобщенных координат  $j$ -х шарниров,  $j = 1, 2, \dots, i$ , но наиболее чаще рассматривают матрицы Якоби последнего звена исполнительного механизма.

Важно, что с помощью этих матриц, зная производные по времени обобщенных координат исполнительного механизма (скорости вращения шарниров), можно определить угловую скорость любого его звена.

Если  $C_i^{(0)}$  и  $C_i^{(i)}$  известны для каждого звена, можно составить блочные матрицы  $C^{(0)}$  и  $C^{(i)}$ , в которых матрицы  $C_i^{(0)}$  и  $C_i^{(i)}$  будут представлены блочными строками размера  $(3 \times n)$  с соответствующими номерами. Размер таких блочных матриц —  $(3n \times n)$ . Элементами блочных матриц  $C^{(0)} = \{C_{ij}^{(0)}\}$  и  $C^{(i)} = \{C_{ij}^{(i)}\}$  являются векторы  $c_j^{(0)}$  и  $c_j^{(i)}$  — такие, что  $C_{ij}^{(0)} = c_j^{(0)}$  и  $C_{ij}^{(i)} = c_j^{(i)}$ . При этом элементы матриц  $C^{(0)}$  и  $C^{(i)}$  следует принять равными нулю при  $j > i$ .

Используя блочные матрицы, можно составить выражения для расчета *блочного вектора угловых скоростей* сразу всех звеньев:

$$\omega^{(0)} = C^{(0)} \cdot \dot{q},$$

$$\omega^{(i)} = C^{(i)} \cdot \dot{q},$$

где  $\omega^{(0)} = [\omega_1^{(0)T} \quad \omega_2^{(0)T} \quad \dots \quad \omega_n^{(0)T}]^T$ ,  $\omega^{(i)} = [\omega_1^{(i)T} \quad \omega_2^{(i)T} \quad \dots \quad \omega_n^{(i)T}]^T$ .

Блочные матрицы  $C^{(0)}$  и  $C^{(i)}$  носят название *матриц Якоби угловых скоростей исполнительного механизма*.

#### 5.4. Линейные скорости звеньев

Продифференцировав по времени выражение (3.2) (различные индексы суммирования во втором и третьем слагаемых приняты для удобства дальнейших преобразований), можно получить соотношения для определения линейных скоростей звеньев  $V_i^{(0)}$  в проекциях на оси  $\{СК\}_0$ :

$$V_i^{(0)} = \dot{t}_{i(0)}^{(0)} = \dot{\tau}_{0i} \cdot t_{i(i)}^{(0)} + \sum_{k=1}^i \dot{\tau}_{0k} \cdot (v_k \cdot (1 - \sigma_k) \cdot q_k + l_k^{(k)}) + \sum_{j=1}^i \tau_{0j} \cdot v_j \cdot (1 - \sigma_j) \cdot \dot{q}_j.$$

Подставив в это выражение значения  $\dot{\tau}_{0i} = \lambda(\omega_i^{(0)}) \cdot \tau_{0i}$  и  $\dot{\tau}_{0k} = \lambda(\omega_k^{(0)}) \cdot \tau_{0k}$ , из (2.7), получаем

$$V_i^{(0)} = \lambda(\omega_i^{(0)}) \cdot \tau_{0i} \cdot t_{i(i)}^{(i)} + \sum_{k=1}^i \lambda(\omega_k^{(0)}) \cdot \tau_{0k} \cdot (v_k \cdot (1 - \sigma_k) \cdot q_k + l_k^{(k)}) + \sum_{j=1}^i \tau_{0j} \cdot v_j \cdot (1 - \sigma_j) \cdot \dot{q}_j. \quad (5.8)$$

В равенство (5.8) подставляем выражения для  $\omega_i^{(0)}$  и  $\omega_k^{(0)}$  в соответствии с равенством (5.2)

$$\omega_i^{(0)} = \sum_{j=1}^i \tau_{0j} \cdot v_j \cdot \sigma_j \cdot \dot{q}_j, \quad \omega_k^{(0)} = \sum_{j=1}^k \tau_{0j} \cdot v_j \cdot \sigma_j \cdot \dot{q}_j,$$

получаем

$$V_i^{(0)} = \sum_{j=1}^i \lambda(\tau_{0j} \cdot \nu_j \cdot \sigma_j) \cdot \tau_{0i} \cdot t_{i(i)}^{(i)} \cdot \dot{q}_j + \sum_{k=1}^i \sum_{j=1}^k \lambda(\tau_{0j} \cdot \nu_j \cdot \sigma_j) \cdot \tau_{0k} \cdot (\nu_k \cdot (1 - \sigma_k) \cdot q_k + l_k^{(k)}) \cdot \dot{q}_k + \sum_{j=1}^i \tau_{0j} \cdot \nu_j \cdot (1 - \sigma_j) \cdot \dot{q}_j. \quad (5.9)$$

Соотношения для определения линейных скоростей звеньев  $V_i^{(i)}$  в проекциях на оси, связанных со звеньями  $\{СК\}_i$ , можно получить путем умножения справа выражения (5.8) на матрицу  $\tau_{i0}$ :

$$V_i^{(i)} = \lambda(\omega_i^{(i)}) \cdot t_{i(i)}^{(i)} + \sum_{k=1}^i \lambda(\omega_k^{(i)}) \cdot \tau_{ik} \cdot (\nu_k \cdot (1 - \sigma_k) \cdot q_k + l_k^{(k)}) + \sum_{j=1}^i \tau_{ij} \cdot \nu_j \cdot (1 - \sigma_j) \cdot \dot{q}_j.$$

Подставив в полученное равенство выражения для  $\omega_i^{(i)}$  и  $\omega_k^{(k)}$  в соответствии с равенством (5.4):

$$\omega_i^{(i)} = \sum_{j=1}^i \tau_{ij} \cdot \nu_j \cdot \sigma_j \cdot \dot{q}_j, \quad \omega_k^{(k)} = \sum_{j=1}^k \tau_{kj} \cdot \nu_j \cdot \sigma_j \cdot \dot{q}_j,$$

получаем

$$V_i^{(i)} = \sum_{j=1}^i \lambda(\tau_{ij} \cdot \nu_j \cdot \sigma_j) \cdot t_{i(i)}^{(i)} \cdot \dot{q}_j + \sum_{k=1}^i \sum_{j=1}^k \lambda(\tau_{ij} \cdot \nu_j \cdot \sigma_j) \cdot \tau_{ik} \cdot (\nu_k \cdot (1 - \sigma_k) \cdot q_k + l_k^{(k)}) \cdot \dot{q}_k + \sum_{j=1}^i \tau_{ij} \cdot \nu_j \cdot (1 - \sigma_j) \cdot \dot{q}_j. \quad (5.10)$$

Видно, что даже с использованием матриц (3×3) полученные уравнения довольно громоздки. Их можно сделать более компактными и удобными для оперирования, если использовать блочные матрицы, как и в случае с угловыми скоростями звеньев исполнительных механизмов.

## 5.5. Понятие и свойства векторов $D_{ij}^{(0)V}$ и $D_{ij}^{(0)\omega}$

Покажем, что выражение (5.9) можно представить в виде

$$V_i^{(0)} = \sum_{j=1}^i D_{ij}^{(0)} \cdot \dot{q}_j, \quad (5.11)$$

где  $D_{ij}^{(0)}$  — вектор размера (3×1), состоящий из двух компонентов — векторов такого же размера:

$$D_{ij}^{(0)} = D_{ij}^{(0)V} + D_{ij}^{(0)\omega}. \quad (5.12)$$

При этом  $D_{ij}^{(0)V}$  — орт оси  $Z_{j-1}$ , спроецированный на оси  $\{СК\}_0$ , и  $D_{ij}^{(0)\omega}$  — векторное произведение векторов  $c_j^{(0)}$  и  $R_{ij}^{(0)}$  (рис. 5.1) рассчитывают по выражениям

$$D_{ij}^{(0)V} = \tau_{0j} \cdot \mathbf{v}_j \cdot (1 - \sigma_j), \quad (5.13)$$

$$D_{ij}^{(0)\omega} = \lambda(\tau_{0j} \cdot \mathbf{v}_j \cdot \sigma_j) \cdot R_{ij}^{(0)} = \lambda(c_j^{(0)}) \cdot R_{ij}^{(0)}, \quad (5.14)$$

где  $R_{ij}^{(0)}$  — вектор, проведенный из начала  $\{\text{СК}\}_{j-1}$  к точке на звене  $i$ , скорость которой определяется, вектор рассматривается в проекциях на оси  $\{\text{СК}\}_0$ ;  $|R_{ij}^{(0)}|$  — его длина. Этот вектор определяют по формуле

$$R_{ij}^{(0)} = \tau_{0i} \cdot l_{i(i)}^{(i)} + \sum_{k=j}^i \tau_{0k} \cdot (\mathbf{v}_k \cdot (1 - \sigma_k) \cdot \mathbf{q}_k + l_k^{(k)}). \quad (5.15)$$

Исходя из стандартов для обозначений,  $R_{ij}^{(0)}$  следовало бы записать как  $R_{i(j-1)}^{(0)}$ .

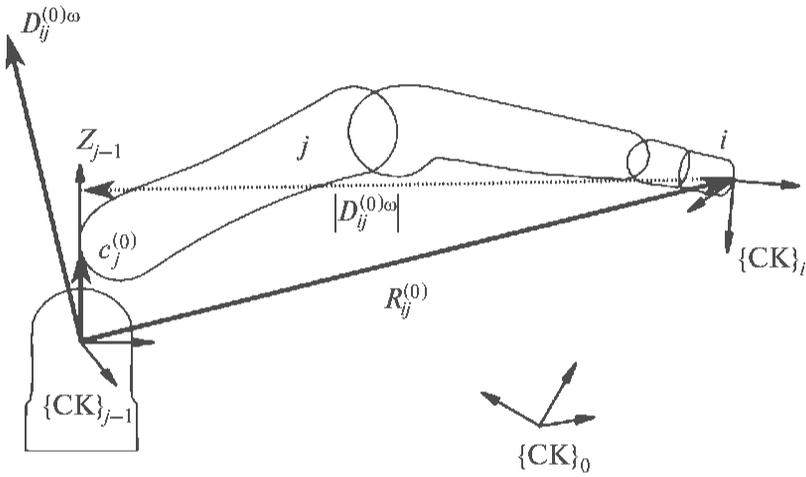


Рис. 5.1. Свойства векторов  $D_{ij}^{(0)\omega}$  и  $R_{ij}^{(0)}$

Очевидно, что выражение для  $D_{ij}^{(0)V}$  соответствует третьему слагаемому равенства (5.9).

Вектор  $D_{ij}^{(0)\omega}$  получаем в результате преобразований двух первых слагаемых выражения (5.9). Первое слагаемое из равенства (5.9) в выражение для вектора  $D_{ij}^{(0)\omega}$  переходит непосредственно. Изменив порядок и пределы суммирования, можно получить  $D_{ij}^{(0)\omega}$  путем преобразования второго слагаемого выражения (5.9):

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^i \sum_{j=1}^k \lambda(\tau_{0j} \cdot \mathbf{v}_j \cdot \sigma_j) \cdot \tau_{0k} \cdot (\mathbf{v}_k \cdot (1 - \sigma_k) \cdot \mathbf{q}_k + l_k^{(k)}) \cdot \dot{\mathbf{q}}_k = \\ & = \sum_{j=1}^i \sum_{k=j}^i \lambda(\tau_{0j} \cdot \mathbf{v}_j \cdot \sigma_j) \cdot \tau_{0k} \cdot (\mathbf{v}_k \cdot (1 - \sigma_k) \cdot \mathbf{q}_k + l_k^{(k)}) \cdot \dot{\mathbf{q}}_k = \\ & = \sum_{j=1}^i \lambda(\tau_{0j} \cdot \mathbf{v}_j \cdot \sigma_j) \cdot \sum_{k=j}^i \tau_{0k} \cdot (\mathbf{v}_k \cdot (1 - \sigma_k) \cdot \mathbf{q}_k + l_k^{(k)}) \cdot \dot{\mathbf{q}}_k. \end{aligned}$$

Полученное выражение соответствует  $D_{ij}^{(0)\omega}$ , что и требовалось доказать.

Свойства векторов  $D_{ij}^{(0)V}$  и  $D_{ij}^{(0)\omega}$ :

1)  $D_{ij}^{(0)V} = 0$  при  $j = [\text{ВТ}]$  ввиду того, что в выражения для  $D_{ij}^{(0)V}$  входит  $\sigma_j$ ;

2)  $|D_{ij}^{(0)V}| = 1$  при  $j = [\text{ПТ}]$ , поскольку в выражения для  $D_{ij}^{(0)V}$  входит  $\sigma_j$ ;

3) модуль вектора  $D_{ij}^{(0)\omega}$  равен площади прямоугольника, построенного на

векторах  $c_j^{(0)}$  и  $R_{ij}^{(0)}$  как на сторонах;  $|D_{ij}^{(0)\omega}|$  численно равен длине перпендикуляра, опущенного из конца вектора  $R_{ij}^{(0)}$  к линии вдоль вектора  $c_j^{(0)}$ , поскольку  $|c_j^{(0)}| = 1$  при  $j = [\text{ВТ}]$ ;

4)  $D_{ij}^{(0)\omega} = 0$  при  $j = [\text{ПТ}]$ , так как в выражения для  $D_{ij}^{(0)\omega}$  входит  $\sigma_j$ .

## 5.6. Понятие и свойства векторов $D_{ij}^{(i)V}$ и $D_{ij}^{(i)\omega}$

По аналогии выражение (5.10) можно представить в виде

$$V_i^{(i)} = \sum_{j=1}^i D_{ij}^{(i)} \cdot \dot{q}_j, \quad (5.16)$$

где  $D_{ij}^{(i)}$  — вектор размера  $(3 \times 1)$ , состоящий из двух компонентов — векторов такого же размера:

$$D_{ij}^{(i)} = D_{ij}^{(i)V} + D_{ij}^{(i)\omega}.$$

При этом  $D_{ij}^{(i)V}$  — орт оси  $Z_{j-1}$ , спроецированный на оси  $\{\text{СК}\}_i$ , и  $D_{ij}^{(i)\omega}$  — векторное произведение векторов  $c_j^{(i)}$  и  $R_{ij}^{(i)}$  рассчитывают по выражениям

$$D_{ij}^{(i)V} = \tau_{ij} \cdot \nu_j \cdot (1 - \sigma_j),$$

$$D_{ij}^{(i)\omega} = \lambda (\tau_{ij} \cdot \nu_j \cdot \sigma_j) \cdot R_{ij}^{(i)} = \lambda (c_j^{(i)}) \cdot R_{ij}^{(i)},$$

где  $R_{ij}^{(i)}$  — вектор, проведенный из начала  $\{\text{СК}\}_{j-1}$  к точке на звене  $i$ , скорость которой определяется, вектор рассматривается в проекциях на оси  $\{\text{СК}\}_i$ ;  $|R_{ij}^{(i)}|$  — его длина. Этот вектор

$$R_{ij}^{(i)} = t_{i(i)}^{(i)} + \sum_{k=j}^i \tau_{ik} \cdot (\nu_k \cdot (1 - \sigma_k) \cdot q_k + l_k^{(k)}).$$

Геометрическое изображение свойств векторов  $D_{ij}^{(i)\omega}$  и  $R_{ij}^{(i)}$  аналогично приведенному выше для векторов  $D_{ij}^{(0)\omega}$  и  $R_{ij}^{(0)}$  (см. рис. 5.1).

Свойства векторов  $D_{ij}^{(i)V}$  и  $D_{ij}^{(i)\omega}$ :

1)  $D_{ij}^{(i)V} = 0$  при  $j = [\text{ВТ}]$ , поскольку в выражение для  $D_{ij}^{(i)V}$  входит  $\sigma_j$ ;

- 2)  $|D_{ij}^{(i)V}| = 1$  при  $j = [\text{ПТ}]$ , поскольку в выражение для  $D_{ij}^{(i)V}$  входит  $\sigma_j$ ;
- 3) модуль вектора  $D_{ij}^{(i)\omega}$  равен площади прямоугольника, построенного на векторах  $c_j^{(i)}$  и  $R_{ij}^{(i)}$ , как на сторонах;  $|D_{ij}^{(i)\omega}|$  численно равен длине перпендикуляра, опущенного из конца вектора  $R_{ij}^{(i)}$  к линии, параллельной вектору  $c_j^{(i)}$ , поскольку  $|c_j^{(i)}| = 1$  при  $j = [\text{ВТ}]$ ;
- 4)  $D_{ij}^{(i)\omega} = 0$ , когда  $j = [\text{ПТ}]$ , так как в выражение для  $D_{ij}^{(i)\omega}$  входит  $\sigma_j$ .

## 5.7. Матрица Якоби линейных скоростей звеньев

Из выражений (5.11) и (5.16) следует, что

$$V_n^{(0)} = D_n^{(0)} \cdot \dot{q},$$

$$V_n^{(n)} = D_n^{(n)} \cdot \dot{q},$$

где  $D_n^{(0)} = [D_{n_1}^{(0)} \quad D_{n_2}^{(0)} \quad \dots \quad D_{n_n}^{(0)}]$ ,  $D_n^{(n)} = [D_{n_1}^{(n)} \quad D_{n_2}^{(n)} \quad \dots \quad D_{n_n}^{(n)}]$  — матрицы, составленные из векторов  $D_{ij}^{(0)}$ ,  $D_{ij}^{(i)}$  и имеющие размер  $(3 \times n)$ .

Матрицы  $D_n^{(0)}$  и  $D_n^{(n)}$  линейно связывают между собой векторы производных по времени обобщенных координат исполнительного механизма и линейных скоростей последних  $n$ -х звеньев. Аналогично можно построить матрицы  $D_i^{(0)}$  и  $D_i^{(n)}$  для любых других звеньев. В этом случае размер вектора  $q$  —  $(i \times 1)$ , т. е. он состоит из обобщенных координат  $j$ -х шарниров, ( $j = 1, 2, \dots, i$ ). Но чаще всего рассматривают матрицы последнего звена.

Важно, что с помощью этих матриц, зная производные по времени обобщенных координат исполнительного механизма (скоростей вращения шарниров), можно определить линейную скорость любого звена.

Зная  $D_i^{(0)}$  и  $D_i^{(i)}$  для каждого звена, можно составить блочные матрицы  $D^{(0)}$  и  $D^{(i)}$ , в которых матрицы  $D_i^{(0)}$  и  $D_i^{(i)}$  будут представлены блочными строками размера  $(3 \times n)$  с соответствующими номерами. Размер блочных матриц —  $(3n \times n)$ . Элементами блочных матриц  $D^{(0)} = \{D_{ij}^{(0)}\}$  и  $D^{(i)} = \{D_{ij}^{(i)}\}$  являются векторы  $D_{ij}^{(0)}$  и  $D_{ij}^{(i)}$  соответственно. При этом элементы матриц  $C^{(0)}$  и  $C^{(i)}$  следует принять равными нулю при  $j > i$ .

Используя такие блочные матрицы, можно записать выражения для расчета блочного вектора линейных скоростей сразу всех звеньев:

$$V^{(0)} = D^{(0)} \cdot \dot{q},$$

$$V^{(i)} = D^{(i)} \cdot \dot{q},$$

где  $V^{(0)} = [V_1^{(0)T} \quad V_2^{(0)T} \quad \dots \quad V_n^{(0)T}]^T$ ,  $V^{(i)} = [V_1^{(i)T} \quad V_2^{(i)T} \quad \dots \quad V_n^{(i)T}]^T$ .

Блочные матрицы  $D^{(0)}$  и  $D^{(i)}$  носят название матриц Якоби линейных скоростей исполнительных механизмов.

## 5.8. Матрица Якоби скоростей последнего звена

Выражения для расчета линейных  $V_n^{(0)}$  и угловых  $\omega_n^{(0)}$  скоростей последних звеньев исполнительного механизма в проекциях на оси  $\{СК\}_0$  имеют вид

$$\omega_n^{(0)} = C_n^{(0)} \cdot \dot{q} \quad \cap \quad V_n^{(0)} = D_n^{(0)} \cdot \dot{q}. \quad (5.17)$$

Составим теперь блочный вектор  $[\omega_n^{(0)T} \mid V_n^{(0)T}]^T$  и блочную матрицу  $\Xi^{(0)}$ , элементами которой являются матрицы  $c_j^{(0)}$  и  $D_{ni}^{(0)}$ :

$$\Xi^{(0)} = \begin{bmatrix} c_1^{(0)} & c_2^{(0)} & \dots & c_n^{(0)} \\ - & - & - & - \\ D_{n_1}^{(0)} & D_{n_2}^{(0)} & \dots & D_{n_n}^{(0)} \end{bmatrix}.$$

Тогда систему уравнений (5.17) можно представить в виде одного уравнения

$$\begin{bmatrix} \omega_n^{(0)} \\ - \\ V_n^{(0)} \end{bmatrix} = \Xi^{(0)} \cdot \dot{q}.$$

Это уравнение связывает векторы угловой и линейной скорости последнего звена исполнительного механизма в  $\{СК\}_0$  и вектор его произвольных обобщенных координат.

Связь между обобщенными и декартовыми координатами — линейная. Матрица  $\Xi^{(0)}$ , связывающая между собой обобщенные и декартовы координаты последнего звена, называется матрицей *Якоби скоростей исполнительного механизма*, или просто *матрицей Якоби*.

На практике необходимо рассчитывать и скорость движения исполнительного механизма по известным показаниям датчиков скорости, установленных на валах приводов (*прямая задача кинематики*), и сигналы управления на входах приводов (при управлении приводами по скорости), соответствующие заданной скорости движения исполнительного механизма (*обратная задача кинематики*). Для решения обратной кинематической задачи для скоростей исполнительного механизма применяют специальные приемы, позволяющие исключить возможные неоднозначности.

По аналогии с матрицей  $\Xi^{(0)}$  можно составить матрицу  $\Xi^{(n)}$  с компонентами  $C_n^{(n)}$  и  $D_n^{(n)}$ . Ее использование позволяет решать задачи расчета скоростей последнего звена в проекциях на оси  $\{СК\}_n$ .

Чтобы определить скорости любых других звеньев, при формировании матриц  $\Xi^{(0)}$  и  $\Xi^{(n)}$  используют векторы  $c_j^{(0)}$ ,  $c_j^{(n)}$  и  $D_{nj}^{(0)}$ ,  $D_{nj}^{(n)}$ .

## Контрольные вопросы и задания

1. Запишите соотношения для определения векторов относительных угловых скоростей звеньев.
2. Что такое матрица Якоби исполнительного механизма МР?
3. Как определяются линейные и угловые скорости звеньев исполнительного механизма МР относительно инерциальной СК?
4. Как выглядят уравнения линейных скоростей звеньев исполнительных механизмов МР? Назовите геометрический смысл элементов уравнений.

## 6. Кинематические задачи

### 6.1. Прямая кинематическая задача

Матрицы Якоби  $D^{(0)}$  и  $D^{(i)}$  можно построить для любых звеньев исполнительного механизма. С их помощью, зная производные по времени обобщенных координат исполнительного механизма (скоростей вращения шарниров), можно определить линейную скорость любого звена. Задача расчета линейных и угловых скоростей звеньев исполнительного механизма по известным производным обобщенных координат носит название *прямой кинематической задачи о скорости* звеньев исполнительного механизма МР.

Прямая кинематическая задача для скоростей исполнительного механизма всегда имеет решение, и притом единственное.

### 6.2. Обратная кинематическая задача

Использование матрицы Якоби позволяет решать как прямую, так и *обратную кинематическую задачу для скоростей исполнительного механизма* (определение скоростей последнего звена по известным производным обобщенных координат и определение обобщенных координат по заданным скоростям последнего звена исполнительного механизма). В последнем случае необходимо решить систему линейных алгебраических уравнений вида

$$\dot{q} = \Xi^{(0)-1} \begin{bmatrix} \omega_n^{(0)} \\ - \\ V_n^{(0)} \end{bmatrix}.$$

Обратная кинематическая задача может иметь единственное решение, множество решений или не иметь их совсем. Конкретный случай зависит от свойств матрицы Якоби.

## Контрольные вопросы и задания

1. В чем заключается понятие прямой кинематической задачи о скорости движения звеньев манипулятора?
2. В чем состоит решение обратной кинематической задачи о скорости схвата МР?
3. Сколько решений может иметь прямая и обратная кинематические задачи о скоростях звеньев исполнительного механизма МР?

## 7. Угловые и линейные ускорения звеньев

### 7.1. Угловые ускорения звеньев

С одной стороны, соотношения для определения угловых ускорений звеньев в проекциях на оси  $\{СК\}_0$  можно получить, продифференцировав по времени выражения для  $\omega_i^{(0)}$  (5.1):

$$\dot{\omega}_i^{(0)} = \sum_{j=1}^i \dot{\tau}_{0j} \cdot \omega_j^{(j)} + \sum_{j=1}^i \tau_{0j} \cdot \dot{\omega}_j^{(j)} = \sum_{j=1}^i \lambda(\omega_j^{(0)}) \cdot \tau_{0j} \cdot \omega_j^{(j)} + \sum_{j=1}^i \tau_{0j} \cdot \dot{\omega}_j^{(j)}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Учитывая, что

$$\omega_j^{(0)} = \sum_{k=1}^j \tau_{0k} \cdot v_k \cdot \sigma_k \cdot \dot{q}_k,$$

$$\omega_j^{(j)} = v_j \cdot \sigma_j \cdot \dot{q}_j,$$

$$\dot{\omega}_j^{(j)} = v_j \cdot \sigma_j \cdot \ddot{q}_j,$$

перепишем выражение для  $\dot{\omega}_i^{(0)}$  в развернутой форме

$$\dot{\omega}_i^{(0)} = \sum_{j=1}^i \lambda \left( \sum_{k=1}^j \tau_{0k} \cdot v_k \cdot \sigma_k \cdot \dot{q}_k \right) \cdot \tau_{0j} \cdot v_j \cdot \sigma_j \cdot \dot{q}_j + \sum_{j=1}^i \tau_{0j} \cdot v_j \cdot \sigma_j \cdot \ddot{q}_j, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (7.1)$$

С другой стороны, соотношения для определения угловых ускорений звеньев в проекциях на оси  $\{СК\}_0$  можно получить, продифференцировав по времени выражения для  $\omega_i^{(0)}$  (5.6):

$$\dot{\omega}_i^{(0)} = \sum_{j=1}^i \dot{c}_j^{(0)} \cdot \dot{q}_j + \sum_{j=1}^i c_j^{(0)} \cdot \ddot{q}_j, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (7.2)$$

Сравнивая соотношения (7.1) и (7.2), получаем следующие равенства:

$$\begin{aligned} \dot{c}_j^{(0)} &= \lambda \left( \sum_{k=1}^j \tau_{0k} \cdot v_k \cdot \sigma_k \cdot \dot{q}_k \right) \cdot \tau_{0j} \cdot v_j \cdot \sigma_j = \lambda(\omega_j^{(0)}) \cdot \tau_{0j} \cdot v_j \cdot \sigma_j = \\ &= \lambda(\omega_j^{(0)}) \cdot c_j^{(0)} = \lambda \left( \sum_{k=1}^j \tau_{0k} \cdot v_k \cdot \sigma_k \cdot \dot{q}_k \right) \cdot c_j^{(0)}. \end{aligned}$$

Аналогичные рассуждения можно провести для случая, в котором векторы угловых ускорений звеньев рассматриваются в проекциях на оси  $\{СК\}_j$ . С одной стороны, соотношения для определения угловых ускорений звеньев можно получить, продифференцировав по времени выражения для  $\omega_j^{(i)}$  (5.3):

$$\dot{\omega}_i^{(i)} = \sum_{j=1}^i \dot{\tau}_{ij} \cdot \omega_j^{(j)} + \sum_{j=1}^i \tau_{ij} \cdot \dot{\omega}_j^{(j)} = \sum_{j=1}^i \lambda(\omega_j^{(i)}) \cdot \tau_{ij} \cdot \omega_j^{(j)} + \sum_{j=1}^i \tau_{ij} \cdot \dot{\omega}_j^{(j)}, \quad i=1, 2, \dots, n.$$

С учетом того, что

$$\omega_j^{(i)} = \sum_{k=1}^j \tau_{ik} \cdot \nu_k \cdot \sigma_k \cdot \dot{q}_k,$$

$$\omega_j^{(j)} = \nu_j \cdot \sigma_j \cdot \dot{q}_j,$$

$$\dot{\omega}_j^{(j)} = \nu_j \cdot \sigma_j \cdot \ddot{q}_j,$$

перепишем выражение для  $\dot{\omega}_i^{(i)}$  в развернутой форме:

$$\dot{\omega}_i^{(i)} = \sum_{j=1}^i \lambda \left( \sum_{k=1}^j \tau_{ik} \cdot \nu_k \cdot \sigma_k \cdot \dot{q}_k \right) \cdot \tau_{ij} \cdot \nu_j \cdot \sigma_j \cdot \dot{q}_j + \sum_{j=1}^i \tau_{ij} \cdot \nu_j \cdot \sigma_j \cdot \ddot{q}_j, \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (7.3)$$

С другой стороны, соотношения для определения угловых ускорений звеньев в проекциях на оси  $\{СК\}_i$  можно получить, продифференцировав по времени выражения для  $\omega_i^{(i)}$  (5.7):

$$\dot{\omega}_i^{(i)} = \sum_{j=1}^i \dot{c}_j^{(i)} \cdot \dot{q}_j + \sum_{j=1}^i c_j^{(i)} \cdot \ddot{q}_j, \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (7.4)$$

Сравнивая соотношения (7.3) и (7.4), справедливо записать

$$\begin{aligned} \dot{c}_j^{(i)} &= \lambda \left( \sum_{k=1}^j \tau_{ik} \cdot \nu_k \cdot \sigma_k \cdot \dot{q}_k \right) \cdot \tau_{ij} \cdot \nu_j \cdot \sigma_j = \lambda(\omega_j^{(i)}) \cdot \tau_{ij} \cdot \nu_j \cdot \sigma_j = \\ &= \lambda(\omega_j^{(i)}) \cdot c_j^{(i)} = \lambda \left( \sum_{k=1}^j \tau_{ik} \cdot \nu_k \cdot \sigma_k \cdot \dot{q}_k \right) \cdot c_j^{(i)}. \end{aligned}$$

Из полученных соотношений следует, что угловые ускорения звеньев исполнительного механизма линейно зависят от вторых производных обобщенных координат (зависимость задается векторами  $c_j^{(0)}$  и  $c_j^{(i)}$ ) и квадратично — от первых производных обобщенных координат исполнительного механизма.

## 7.2. Линейные ускорения звеньев

Соотношения для определения линейных ускорений звеньев в проекциях на оси  $\{СК\}_0$  можно получить, продифференцировав по времени выражения для  $V_i^{(0)}$  (5.8):

$$\begin{aligned} \dot{V}_i^{(0)} = & \lambda(\dot{\omega}_i^{(0)}) \cdot \tau_{0i} \cdot t_{i(i)}^{(i)} + \lambda(\omega_i^{(0)}) \cdot \dot{\tau}_{0i} \cdot t_{i(i)}^{(i)} + \sum_{k=1}^i \lambda(\dot{\omega}_k^{(0)}) \cdot \tau_{0k} \cdot (\mathbf{v}_k \cdot (1 - \sigma_k) \cdot \mathbf{q}_k + l_k^{(k)}) + \\ & + \sum_{k=1}^i \lambda(\omega_k^{(0)}) \cdot \dot{\tau}_{0k} \cdot (\mathbf{v}_k \cdot (1 - \sigma_k) \cdot \mathbf{q}_k + l_k^{(k)}) + \sum_{k=1}^i \lambda(\omega_k^{(0)}) \cdot \tau_{0k} \cdot \mathbf{v}_k \cdot (1 - \sigma_k) \cdot \dot{\mathbf{q}}_k + \\ & + \sum_{j=1}^i \dot{\tau}_{0j} \cdot \mathbf{v}_j \cdot (1 - \sigma_j) \cdot \dot{\mathbf{q}}_j + \sum_{j=1}^i \tau_{0j} \cdot \mathbf{v}_j \cdot (1 - \sigma_j) \cdot \ddot{\mathbf{q}}_j. \end{aligned}$$

Заменив индекс суммирования  $k$  на  $j$ , имеем

$$\begin{aligned} \dot{V}_i^{(0)} = & \lambda(\dot{\omega}_i^{(0)}) \cdot \tau_{0i} \cdot t_{i(i)}^{(i)} + \lambda(\omega_i^{(0)}) \cdot \dot{\tau}_{0i} \cdot t_{i(i)}^{(i)} + \sum_{j=1}^i \lambda(\dot{\omega}_j^{(0)}) \cdot \tau_{0j} \cdot (\mathbf{v}_j \cdot (1 - \sigma_j) \cdot \mathbf{q}_j + l_j^{(j)}) + \\ & + \sum_{j=1}^i \lambda(\omega_j^{(0)}) \cdot \dot{\tau}_{0j} \cdot (\mathbf{v}_j \cdot (1 - \sigma_j) \cdot \mathbf{q}_j + l_j^{(j)}) + \sum_{j=1}^i \lambda(\omega_j^{(0)}) \cdot \tau_{0j} \cdot \mathbf{v}_j \cdot (1 - \sigma_j) \cdot \dot{\mathbf{q}}_j + \\ & + \sum_{j=1}^i \dot{\tau}_{0j} \cdot \mathbf{v}_j \cdot (1 - \sigma_j) \cdot \dot{\mathbf{q}}_j + \sum_{j=1}^i \tau_{0j} \cdot \mathbf{v}_j \cdot (1 - \sigma_j) \cdot \ddot{\mathbf{q}}_j. \end{aligned}$$

Подставив сюда из (2.7) значения для  $\dot{\tau}_{0i} = \lambda(\omega_i^{(0)}) \cdot \tau_{0i}$  и  $\dot{\tau}_{0j} = \lambda(\omega_j^{(0)}) \cdot \tau_{0j}$ , получаем

$$\begin{aligned} \dot{V}_i^{(0)} = & \lambda(\dot{\omega}_i^{(0)}) \cdot \tau_{0i} \cdot t_{i(i)}^{(i)} + \lambda(\omega_i^{(0)}) \cdot \lambda(\omega_i^{(0)}) \cdot \tau_{0i} \cdot t_{i(i)}^{(i)} + \sum_{j=1}^i \lambda(\dot{\omega}_j^{(0)}) \cdot \tau_{0j} \cdot (\mathbf{v}_j \cdot (1 - \sigma_j) \cdot \mathbf{q}_j + l_j^{(j)}) + \\ & + \sum_{j=1}^i \lambda(\omega_j^{(0)}) \cdot \lambda(\omega_j^{(0)}) \cdot \tau_{0j} \cdot (\mathbf{v}_j \cdot (1 - \sigma_j) \cdot \mathbf{q}_j + l_j^{(j)}) + \sum_{j=1}^i \lambda(\omega_j^{(0)}) \cdot \tau_{0j} \cdot \mathbf{v}_j \cdot (1 - \sigma_j) \cdot \dot{\mathbf{q}}_j + \\ & + \sum_{j=1}^i \lambda(\omega_j^{(0)}) \cdot \tau_{0j} \cdot \mathbf{v}_j \cdot (1 - \sigma_j) \cdot \dot{\mathbf{q}}_j + \sum_{j=1}^i \tau_{0j} \cdot \mathbf{v}_j \cdot (1 - \sigma_j) \cdot \ddot{\mathbf{q}}_j = \\ = & \lambda(\dot{\omega}_i^{(0)}) \cdot \tau_{0i} \cdot t_{i(i)}^{(i)} + \lambda(\omega_i^{(0)}) \cdot \lambda(\omega_i^{(0)}) \cdot \tau_{0i} \cdot t_{i(i)}^{(i)} + \sum_{j=1}^i \lambda(\dot{\omega}_j^{(0)}) \cdot \tau_{0j} \cdot (\mathbf{v}_j \cdot (1 - \sigma_j) \cdot \mathbf{q}_j + l_j^{(j)}) + \\ & + \sum_{j=1}^i \lambda(\omega_j^{(0)}) \cdot \lambda(\omega_j^{(0)}) \cdot \tau_{0j} \cdot (\mathbf{v}_j \cdot (1 - \sigma_j) \cdot \mathbf{q}_j + l_j^{(j)}) + 2 \cdot \sum_{j=1}^i \lambda(\omega_j^{(0)}) \cdot \tau_{0j} \cdot \mathbf{v}_j \cdot (1 - \sigma_j) \cdot \dot{\mathbf{q}}_j + \\ & + \sum_{j=1}^i \tau_{0j} \cdot \mathbf{v}_j \cdot (1 - \sigma_j) \cdot \ddot{\mathbf{q}}_j, \end{aligned}$$

или в развернутой форме

$$\begin{aligned} \dot{V}_i^{(0)} = & \lambda \left( \sum_{k=1}^i \dot{\tau}_{0k} \cdot \mathbf{v}_k \cdot \sigma_k \cdot \dot{\mathbf{q}}_k + \sum_{k=1}^i \tau_{0k} \cdot \mathbf{v}_k \cdot \sigma_k \cdot \ddot{\mathbf{q}}_k \right) \cdot \tau_{0i} \cdot t_{i(i)}^{(i)} + \\ & + \lambda \left( \sum_{k=1}^i \tau_{0k} \cdot \mathbf{v}_k \cdot \sigma_k \cdot \dot{\mathbf{q}}_k \right) \cdot \lambda \left( \sum_{k=1}^i \tau_{0k} \cdot \mathbf{v}_k \cdot \sigma_k \cdot \dot{\mathbf{q}}_k \right) \cdot \tau_{0i} \cdot t_{i(i)}^{(i)} + \\ & + \sum_{j=1}^i \lambda \left( \sum_{k=1}^j \dot{\tau}_{0k} \cdot \mathbf{v}_k \cdot \sigma_k \cdot \dot{\mathbf{q}}_k + \sum_{k=1}^j \tau_{0k} \cdot \mathbf{v}_k \cdot \sigma_k \cdot \ddot{\mathbf{q}}_k \right) \cdot \tau_{0j} \cdot (\mathbf{v}_j \cdot (1 - \sigma_j) \cdot \mathbf{q}_j + l_j^{(j)}) + \\ & + \sum_{j=1}^i \lambda \left( \sum_{k=1}^j \tau_{0k} \cdot \mathbf{v}_k \cdot \sigma_k \cdot \dot{\mathbf{q}}_k \right) \cdot \lambda \left( \sum_{k=1}^j \tau_{0k} \cdot \mathbf{v}_k \cdot \sigma_k \cdot \dot{\mathbf{q}}_k \right) \cdot \tau_{0j} \cdot (\mathbf{v}_j \cdot (1 - \sigma_j) \cdot \mathbf{q}_j + l_j^{(j)}) + \\ & + 2 \cdot \sum_{j=1}^i \lambda \left( \sum_{k=1}^j \tau_{0k} \cdot \mathbf{v}_k \cdot \sigma_k \cdot \dot{\mathbf{q}}_k \right) \cdot \tau_{0j} \cdot \mathbf{v}_j \cdot (1 - \sigma_j) \cdot \dot{\mathbf{q}}_j + \sum_{j=1}^i \tau_{0j} \cdot \mathbf{v}_j \cdot (1 - \sigma_j) \cdot \ddot{\mathbf{q}}_j, \end{aligned}$$

с учетом того, что

$$\begin{aligned}\omega_i^{(0)} &= \sum_{k=1}^i \tau_{0k} \cdot \nu_k \cdot \sigma_k \cdot \dot{q}_k, \\ \dot{\omega}_i^{(0)} &= \sum_{k=1}^i \dot{\tau}_{0k} \cdot \nu_k \cdot \sigma_k \cdot \dot{q}_k + \sum_{k=1}^i \tau_{0k} \cdot \nu_k \cdot \sigma_k \cdot \ddot{q}_k, \\ \omega_j^{(0)} &= \sum_{k=1}^j \tau_{0k} \cdot \nu_k \cdot \sigma_k \cdot \dot{q}_k, \\ \dot{\omega}_j^{(0)} &= \sum_{k=1}^j \dot{\tau}_{0k} \cdot \nu_k \cdot \sigma_k \cdot \dot{q}_k + \sum_{k=1}^j \tau_{0k} \cdot \nu_k \cdot \sigma_k \cdot \ddot{q}_k.\end{aligned}$$

Для удобства записываем полученное выражение для  $\dot{V}_i^{(0)}$  в развернутой форме в следующем виде:

$$\begin{aligned}\dot{V}_i^{(0)} &= \lambda \left( \sum_{k=1}^i \dot{\tau}_{0k} \cdot \nu_k \cdot \sigma_k \cdot \dot{q}_k \right) \cdot \tau_{0i} \cdot t_{i(i)}^{(i)} + \lambda \left( \sum_{k=1}^i \tau_{0k} \cdot \nu_k \cdot \sigma_k \cdot \ddot{q}_k \right) \cdot \tau_{0i} \cdot t_{i(i)}^{(i)} + \\ &+ \lambda \left( \sum_{k=1}^i \tau_{0k} \cdot \nu_k \cdot \sigma_k \cdot \dot{q}_k \right) \cdot \lambda \left( \sum_{k=1}^i \tau_{0k} \cdot \nu_k \cdot \sigma_k \cdot \dot{q}_k \right) \cdot \tau_{0i} \cdot t_{i(i)}^{(i)} + \\ &+ \sum_{j=1}^i \lambda \left( \sum_{k=1}^j \dot{\tau}_{0k} \cdot \nu_k \cdot \sigma_k \cdot \dot{q}_k \right) \cdot \tau_{0j} \cdot \left( \nu_j \cdot (1 - \sigma_j) \cdot q_j + l_j^{(j)} \right) + \\ &+ \sum_{j=1}^i \lambda \left( \sum_{k=1}^j \tau_{0k} \cdot \nu_k \cdot \sigma_k \cdot \ddot{q}_k \right) \cdot \tau_{0j} \cdot \left( \nu_j \cdot (1 - \sigma_j) \cdot q_j + l_j^{(j)} \right) + \\ &+ \sum_{j=1}^i \lambda \left( \sum_{k=1}^j \tau_{0k} \cdot \nu_k \cdot \sigma_k \cdot \dot{q}_k \right) \cdot \lambda \left( \sum_{k=1}^j \tau_{0k} \cdot \nu_k \cdot \sigma_k \cdot \dot{q}_k \right) \cdot \tau_{0j} \cdot \left( \nu_j \cdot (1 - \sigma_j) \cdot q_j + l_j^{(j)} \right) + \\ &+ 2 \cdot \sum_{j=1}^i \lambda \left( \sum_{k=1}^j \tau_{0k} \cdot \nu_k \cdot \sigma_k \cdot \dot{q}_k \right) \cdot \tau_{0j} \cdot \nu_j \cdot (1 - \sigma_j) \cdot \dot{q}_j + \sum_{j=1}^i \tau_{0j} \cdot \nu_j \cdot (1 - \sigma_j) \cdot \ddot{q}_j.\end{aligned}$$

Подставив сюда из выражения (2.7) значения для  $\dot{\tau}_{0k} = \lambda(\omega_k^{(0)}) \cdot \tau_{0k}$ , с учетом того, что  $\omega_k^{(0)} = \sum_{m=1}^k \tau_{0m} \cdot \nu_m \cdot \sigma_m \cdot \dot{q}_m$ , а значит,  $\dot{\tau}_{0k} = \lambda \left( \sum_{m=1}^k \tau_{0m} \cdot \nu_m \cdot \sigma_m \cdot \dot{q}_m \right) \cdot \tau_{0k}$ , получаем

$$\begin{aligned}\dot{V}_i^{(0)} &= \lambda \left( \sum_{k=1}^i \lambda \left( \sum_{m=1}^k \tau_{0m} \cdot \nu_m \cdot \sigma_m \cdot \dot{q}_m \right) \cdot \tau_{0k} \cdot \nu_k \cdot \sigma_k \cdot \dot{q}_k \right) \cdot \tau_{0i} \cdot t_{i(i)}^{(i)} + \\ &+ \lambda \left( \sum_{k=1}^i \tau_{0k} \cdot \nu_k \cdot \sigma_k \cdot \ddot{q}_k \right) \cdot \tau_{0i} \cdot t_{i(i)}^{(i)} + \lambda \left( \sum_{k=1}^i \tau_{0k} \cdot \nu_k \cdot \sigma_k \cdot \dot{q}_k \right) \cdot \lambda \left( \sum_{k=1}^i \tau_{0k} \cdot \nu_k \cdot \sigma_k \cdot \dot{q}_k \right) \cdot \tau_{0i} \cdot t_{i(i)}^{(i)} + \\ &+ \sum_{j=1}^i \lambda \left( \sum_{k=1}^j \lambda \left( \sum_{m=1}^k \tau_{0m} \cdot \nu_m \cdot \sigma_m \cdot \dot{q}_m \right) \cdot \tau_{0k} \cdot \nu_k \cdot \sigma_k \cdot \dot{q}_k \right) \cdot \tau_{0j} \cdot \left( \nu_j \cdot (1 - \sigma_j) \cdot q_j + l_j^{(j)} \right) + \\ &+ \sum_{j=1}^i \lambda \left( \sum_{k=1}^j \tau_{0k} \cdot \nu_k \cdot \sigma_k \cdot \ddot{q}_k \right) \cdot \tau_{0j} \cdot \left( \nu_j \cdot (1 - \sigma_j) \cdot q_j + l_j^{(j)} \right) +\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^i \lambda \left( \sum_{k=1}^j \tau_{0k} \cdot \mathbf{v}_k \cdot \sigma_k \cdot \dot{\mathbf{q}}_k \right) \cdot \lambda \left( \sum_{k=1}^j \tau_{0k} \cdot \mathbf{v}_k \cdot \sigma_k \cdot \dot{\mathbf{q}}_k \right) \cdot \tau_{0j} \cdot (\mathbf{v}_j \cdot (1 - \sigma_j) \cdot \mathbf{q}_j + l_j^{(j)}) + \\
& + 2 \cdot \sum_{j=1}^i \lambda \left( \sum_{k=1}^j \tau_{0k} \cdot \mathbf{v}_k \cdot \sigma_k \cdot \dot{\mathbf{q}}_k \right) \cdot \tau_{0j} \cdot \mathbf{v}_j \cdot (1 - \sigma_j) \cdot \dot{\mathbf{q}}_j + \sum_{j=1}^i \tau_{0j} \cdot \mathbf{v}_j \cdot (1 - \sigma_j) \cdot \ddot{\mathbf{q}}_j.
\end{aligned} \tag{7.4}$$

Соотношения для определения линейных ускорений звеньев в проекциях на оси  $\{CK\}_0$  можно получить, продифференцировав по времени выражения для  $V_i^{(0)}$  (5.11):

$$\dot{V}_i^{(0)} = \sum_{j=1}^i \dot{D}_{ij}^{(0)} \cdot \dot{\mathbf{q}}_j + \sum_{j=1}^i D_{ij}^{(0)} \cdot \ddot{\mathbf{q}}_j. \tag{7.5}$$

Выражение для  $D_{ij}^{(0)}$  получено ранее:

$$\begin{aligned}
D_{ij}^{(0)} & = D_{ij}^{(0)V} + D_{ij}^{(0)\omega} = \tau_{0j} \cdot \mathbf{v}_j \cdot (1 - \sigma_j) + \lambda (\tau_{0j} \cdot \mathbf{v}_j \cdot \sigma_j) \cdot R_{ij}^{(0)} = \\
& = \tau_{0j} \cdot \mathbf{v}_j \cdot (1 - \sigma_j) + \lambda (\tau_{0j} \cdot \mathbf{v}_j \cdot \sigma_j) \cdot \left( \tau_{0i} \cdot \mathbf{t}_{i(i)}^{(i)} + \sum_{k=j}^i \tau_{0k} \cdot (\mathbf{v}_k \cdot (1 - \sigma_k) \cdot \mathbf{q}_k + l_k^{(k)}) \right).
\end{aligned}$$

Переписываем второе, пятое и восьмое слагаемые в выражении для  $\dot{V}_i^{(0)}$  (7.4), заменив во втором слагаемом индекс суммирования  $k$  на  $j$ , а в пятом —  $k$  на  $j$  и  $j$  на  $k$ :

$$\begin{aligned}
& \lambda \left\{ \sum_{j=1}^i \tau_{0j} \cdot \mathbf{v}_j \cdot \sigma_j \cdot \ddot{\mathbf{q}}_j \right\} \cdot \tau_{0i} \cdot \mathbf{t}_{i(i)}^{(i)} + \sum_{k=1}^i \lambda \left\{ \sum_{j=1}^k \tau_{0j} \cdot \mathbf{v}_j \cdot \sigma_j \cdot \ddot{\mathbf{q}}_j \right\} \cdot \tau_{0k} \cdot (\mathbf{v}_k \cdot (1 - \sigma_k) \cdot \mathbf{q}_k + l_k^{(k)}) + \\
& + \sum_{j=1}^i \tau_{0j} \cdot \mathbf{v}_j \cdot (1 - \sigma_j) \cdot \ddot{\mathbf{q}}_j = \\
& = \sum_{j=1}^i \lambda (\tau_{0j} \cdot \mathbf{v}_j \cdot \sigma_j) \cdot \tau_{0i} \cdot \mathbf{t}_{i(i)}^{(i)} \cdot \ddot{\mathbf{q}}_j + \sum_{k=1}^i \sum_{j=1}^k \lambda (\tau_{0j} \cdot \mathbf{v}_j \cdot \sigma_j) \cdot \tau_{0k} \cdot (\mathbf{v}_k \cdot (1 - \sigma_k) \cdot \mathbf{q}_k + l_k^{(k)}) \cdot \ddot{\mathbf{q}}_j + \\
& + \sum_{j=1}^i \tau_{0j} \cdot \mathbf{v}_j \cdot (1 - \sigma_j) \cdot \ddot{\mathbf{q}}_j = \\
& = \sum_{j=1}^i \left\{ \lambda (\tau_{0j} \cdot \mathbf{v}_j \cdot \sigma_j) \cdot \left[ \tau_{0i} \cdot \mathbf{t}_{i(i)}^{(i)} + \sum_{k=j}^i \tau_{0k} \cdot (\mathbf{v}_k \cdot (1 - \sigma_k) \cdot \mathbf{q}_k + l_k^{(k)}) \right] + \tau_{0j} \cdot \mathbf{v}_j \cdot (1 - \sigma_j) \right\} \cdot \ddot{\mathbf{q}}_j = \\
& = \sum_{j=1}^i D_{ij}^{(0)} \cdot \ddot{\mathbf{q}}_j.
\end{aligned}$$

Тогда  $\sum_{j=1}^i \dot{D}_{ij}^{(0)} \cdot \dot{\mathbf{q}}_j$  — это оставшиеся первое, третье, четвертое, шестое и седьмое слагаемые в выражении для  $\dot{V}_i^{(0)}$  (7.4):

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^i \dot{D}_{ij}^{(0)} \cdot \dot{\mathbf{q}}_j & = \lambda \left( \sum_{k=1}^i \lambda \left( \sum_{m=1}^k \tau_{0m} \cdot \mathbf{v}_m \cdot \sigma_m \cdot \dot{\mathbf{q}}_m \right) \cdot \tau_{0k} \cdot \mathbf{v}_k \cdot \sigma_k \cdot \dot{\mathbf{q}}_k \right) \cdot \tau_{0i} \cdot \mathbf{t}_{i(i)}^{(i)} + \\
& + \lambda \left( \sum_{k=1}^i \tau_{0k} \cdot \mathbf{v}_k \cdot \sigma_k \cdot \dot{\mathbf{q}}_k \right) \cdot \lambda \left( \sum_{k=1}^i \tau_{0k} \cdot \mathbf{v}_k \cdot \sigma_k \cdot \dot{\mathbf{q}}_k \right) \cdot \tau_{0i} \cdot \mathbf{t}_{i(i)}^{(i)} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^i \lambda \left( \sum_{k=1}^j \lambda \left( \sum_{m=1}^k \tau_{0m} \cdot v_m \cdot \sigma_m \cdot \dot{q}_m \right) \cdot \tau_{0k} \cdot v_k \cdot \sigma_k \cdot \dot{q}_k \right) \cdot \tau_{0j} \cdot (v_j \cdot (1 - \sigma_j) \cdot q_j + l_j^{(j)}) + \\
& + \sum_{j=1}^i \lambda \left( \sum_{k=1}^j \tau_{0k} \cdot v_k \cdot \sigma_k \cdot \dot{q}_k \right) \cdot \lambda \left( \sum_{k=1}^j \tau_{0k} \cdot v_k \cdot \sigma_k \cdot \dot{q}_k \right) \cdot \tau_{0j} \cdot (v_j \cdot (1 - \sigma_j) \cdot q_j + l_j^{(j)}) + \\
& + 2 \cdot \sum_{j=1}^i \lambda \left( \sum_{k=1}^j \tau_{0k} \cdot v_k \cdot \sigma_k \cdot \dot{q}_k \right) \cdot \tau_{0j} \cdot v_j \cdot (1 - \sigma_j) \cdot \dot{q}_j.
\end{aligned}$$

В первом и во втором слагаемом полученного равенства заменяем индекс суммирования  $k$  на  $j$ , а в третьем и в четвертом — индексы суммирования  $k$  на  $j$  и  $j$  на  $k$ :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^i \dot{D}_{ij}^{(0)} \cdot \dot{q}_j & = \sum_{j=1}^i \lambda \left( \sum_{m=1}^j \lambda (\tau_{0m} \cdot v_m \cdot \sigma_m \cdot \dot{q}_m) \cdot \tau_{0j} \cdot v_j \cdot \sigma_j \right) \cdot \tau_{0i} \cdot t_{i(i)}^{(i)} \cdot \dot{q}_j + \\
& + \sum_{j=1}^i \lambda (\tau_{0j} \cdot v_j \cdot \sigma_j) \cdot \sum_{j=1}^i \lambda (\tau_{0j} \cdot v_j \cdot \sigma_j) \cdot \tau_{0i} \cdot t_{i(i)}^{(i)} \cdot \dot{q}_j \cdot \dot{q}_j + \\
& + \sum_{k=1}^i \sum_{j=1}^k \lambda \left( \sum_{m=1}^j \lambda (\tau_{0m} \cdot v_m \cdot \sigma_m \cdot \dot{q}_m) \cdot \tau_{0j} \cdot v_j \cdot \sigma_j \right) \cdot \tau_{0k} \cdot (v_k \cdot (1 - \sigma_k) \cdot q_k + l_k^{(k)}) \cdot \dot{q}_j + \\
& + \sum_{k=1}^i \left( \sum_{j=1}^k \lambda (\tau_{0j} \cdot v_j \cdot \sigma_j) \right)^2 \cdot \tau_{0k} \cdot (v_k \cdot (1 - \sigma_k) \cdot q_k + l_k^{(k)}) \cdot \dot{q}_j \cdot \dot{q}_j + \\
& + \sum_{j=1}^i 2 \cdot \sum_{k=1}^j \lambda (\tau_{0k} \cdot v_k \cdot \sigma_k \cdot \dot{q}_k) \cdot \tau_{0j} \cdot v_j \cdot (1 - \sigma_j) \cdot \dot{q}_j.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
\dot{D}_{ij}^{(0)} & = \lambda \left( \sum_{m=1}^j \lambda (\tau_{0m} \cdot v_m \cdot \sigma_m \cdot \dot{q}_m) \cdot \tau_{0j} \cdot v_j \cdot \sigma_j \right) \cdot \tau_{0i} \cdot t_{i(i)}^{(i)} + \\
& + \lambda (\tau_{0j} \cdot v_j \cdot \sigma_j) \cdot \sum_{j=1}^i \lambda (\tau_{0j} \cdot v_j \cdot \sigma_j) \cdot \tau_{0i} \cdot t_{i(i)}^{(i)} \cdot \dot{q}_j + \\
& + \sum_{k=j}^i \lambda \left( \sum_{m=1}^j \lambda (\tau_{0m} \cdot v_m \cdot \sigma_m \cdot \dot{q}_m) \cdot \tau_{0j} \cdot v_j \cdot \sigma_j \right) \cdot \tau_{0k} \cdot (v_k \cdot (1 - \sigma_k) \cdot q_k + l_k^{(k)}) + \\
& + \left( \sum_{k=j}^i \lambda (\tau_{0j} \cdot v_j \cdot \sigma_j) \right)^2 \cdot \tau_{0k} \cdot (v_k \cdot (1 - \sigma_k) \cdot q_k + l_k^{(k)}) \cdot \dot{q}_j + \\
& + 2 \cdot \sum_{k=1}^j \lambda (\tau_{0k} \cdot v_k \cdot \sigma_k \cdot \dot{q}_k) \cdot \tau_{0j} \cdot v_j \cdot (1 - \sigma_j).
\end{aligned}$$

Соотношения для определения линейных ускорений звеньев  $\dot{V}_i^{(i)}$  в проекциях на оси связанных со звеньями системами координат  $\{СК\}_i$  можно получить путем умножения справа выражения (7.4) на матрицу  $\tau_{i0}$ :

$$\begin{aligned}
\dot{V}_i^{(i)} = & \lambda \left( \sum_{k=1}^i \lambda \left( \sum_{m=1}^k \tau_{im} \cdot \mathbf{v}_m \cdot \sigma_m \cdot \dot{\mathbf{q}}_m \right) \cdot \tau_{ik} \cdot \mathbf{v}_k \cdot \sigma_k \cdot \dot{\mathbf{q}}_k \right) \cdot \mathbf{t}_{i(i)}^{(i)} + \lambda \left( \sum_{k=1}^i \tau_{ik} \cdot \mathbf{v}_k \cdot \sigma_k \cdot \ddot{\mathbf{q}}_k \right) \cdot \mathbf{t}_{i(i)}^{(i)} + \\
& + \lambda \left( \sum_{k=1}^i \tau_{ik} \cdot \mathbf{v}_k \cdot \sigma_k \cdot \dot{\mathbf{q}}_k \right) \cdot \lambda \left( \sum_{k=1}^i \tau_{ik} \cdot \mathbf{v}_k \cdot \sigma_k \cdot \dot{\mathbf{q}}_k \right) \cdot \mathbf{t}_{i(i)}^{(i)} + \\
& + \sum_{j=1}^i \lambda \left( \sum_{k=1}^j \lambda \left( \sum_{m=1}^k \tau_{im} \cdot \mathbf{v}_m \cdot \sigma_m \cdot \dot{\mathbf{q}}_m \right) \cdot \tau_{ik} \cdot \mathbf{v}_k \cdot \sigma_k \cdot \dot{\mathbf{q}}_k \right) \cdot \tau_{ij} \cdot \left( \mathbf{v}_j \cdot (1 - \sigma_j) \cdot \mathbf{q}_j + l_j^{(j)} \right) + \\
& + \sum_{j=1}^i \lambda \left( \sum_{k=1}^j \tau_{ik} \cdot \mathbf{v}_k \cdot \sigma_k \cdot \ddot{\mathbf{q}}_k \right) \cdot \tau_{ij} \cdot \left( \mathbf{v}_j \cdot (1 - \sigma_j) \cdot \mathbf{q}_j + l_j^{(j)} \right) + \\
& + \sum_{j=1}^i \lambda \left( \sum_{k=1}^j \tau_{ik} \cdot \mathbf{v}_k \cdot \sigma_k \cdot \dot{\mathbf{q}}_k \right) \cdot \lambda \left( \sum_{k=1}^j \tau_{ik} \cdot \mathbf{v}_k \cdot \sigma_k \cdot \dot{\mathbf{q}}_k \right) \cdot \tau_{ij} \cdot \left( \mathbf{v}_j \cdot (1 - \sigma_j) \cdot \mathbf{q}_j + l_j^{(j)} \right) + \\
& + 2 \cdot \sum_{j=1}^i \lambda \left( \sum_{k=1}^j \tau_{ik} \cdot \mathbf{v}_k \cdot \sigma_k \cdot \dot{\mathbf{q}}_k \right) \cdot \tau_{ij} \cdot \mathbf{v}_j \cdot (1 - \sigma_j) \cdot \dot{\mathbf{q}}_j + \sum_{j=1}^i \tau_{ij} \cdot \mathbf{v}_j \cdot (1 - \sigma_j) \cdot \ddot{\mathbf{q}}_j.
\end{aligned} \tag{7.6}$$

Для определения линейных ускорений звеньев в проекциях на оси  $\{\text{СК}\}_0$  можно получить соотношения, продифференцировав по времени выражения для  $V_i^{(i)}$  (5.16):

$$\dot{V}_i^{(i)} = \sum_{j=1}^i \dot{D}_{ij}^{(i)} \cdot \dot{\mathbf{q}}_j + \sum_{j=1}^i D_{ij}^{(i)} \cdot \ddot{\mathbf{q}}_j.$$

Выражение для  $D_{ij}^{(i)}$  получено ранее:

$$\begin{aligned}
D_{ij}^{(i)} = & D_{ij}^{(i)V} + D_{ij}^{(i)\omega} = \tau_{ij} \cdot \mathbf{v}_j \cdot (1 - \sigma_j) + \lambda (\tau_{ij} \cdot \mathbf{v}_j \cdot \sigma_j) \cdot \mathbf{R}_{ij}^{(i)} = \\
= & \tau_{ij} \cdot \mathbf{v}_j \cdot (1 - \sigma_j) + \lambda (\tau_{ij} \cdot \mathbf{v}_j \cdot \sigma_j) \cdot \left( \mathbf{t}_{i(i)}^{(i)} + \sum_{k=j}^i \tau_{ik} \cdot (\mathbf{v}_k \cdot (1 - \sigma_k) \cdot \mathbf{q}_k + l_k^{(k)}) \right).
\end{aligned}$$

Перепишем второе, пятое и восьмое слагаемые в выражении для  $\dot{V}_i^{(i)}$  (7.6), заменив во втором слагаемом индекс суммирования  $k$  на  $j$ , а в пятом —  $k$  на  $j$  и  $j$  на  $k$ :

$$\begin{aligned}
& \lambda \left| \sum_{j=1}^i \tau_{ij} \cdot \mathbf{v}_j \cdot \sigma_j \cdot \ddot{\mathbf{q}}_j \right| \cdot \mathbf{t}_{i(i)}^{(i)} + \sum_{k=1}^i \lambda \left| \sum_{j=1}^k \tau_{ij} \cdot \mathbf{v}_j \cdot \sigma_j \cdot \ddot{\mathbf{q}}_j \right| \cdot \tau_{ik} \cdot (\mathbf{v}_k \cdot (1 - \sigma_k) \cdot \mathbf{q}_k + l_k^{(k)}) + \\
& + \sum_{j=1}^i \tau_{ij} \cdot \mathbf{v}_j \cdot (1 - \sigma_j) \cdot \ddot{\mathbf{q}}_j = \\
= & \sum_{j=1}^i \lambda (\tau_{ij} \cdot \mathbf{v}_j \cdot \sigma_j) \cdot \mathbf{t}_{i(i)}^{(i)} \cdot \ddot{\mathbf{q}}_j + \sum_{k=1}^i \sum_{j=1}^k \lambda (\tau_{ij} \cdot \mathbf{v}_j \cdot \sigma_j) \cdot \tau_{ik} \cdot (\mathbf{v}_k \cdot (1 - \sigma_k) \cdot \mathbf{q}_k + l_k^{(k)}) \cdot \ddot{\mathbf{q}}_j + \\
& + \sum_{j=1}^i \tau_{ij} \cdot \mathbf{v}_j \cdot (1 - \sigma_j) \cdot \ddot{\mathbf{q}}_j = \\
= & \sum_{j=1}^i \left| \lambda (\tau_{ij} \cdot \mathbf{v}_j \cdot \sigma_j) \cdot \mathbf{t}_{i(i)}^{(i)} + \sum_{k=j}^i \tau_{ik} \cdot (\mathbf{v}_k \cdot (1 - \sigma_k) \cdot \mathbf{q}_k + l_k^{(k)}) \right| + \tau_{ij} \cdot \mathbf{v}_j \cdot (1 - \sigma_j) \cdot \ddot{\mathbf{q}}_j = \sum_{j=1}^i D_{ij}^{(i)}.
\end{aligned}$$

Тогда  $\sum_{j=1}^i \dot{D}_{ij}^{(i)} \cdot \dot{q}_j$  — это оставшиеся первое, третье, четвертое, шестое и седьмое слагаемые в выражении для  $\dot{V}_i^{(i)}$  (7.6):

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^i \dot{D}_{ij}^{(i)} \cdot \dot{q}_j &= \lambda \left\{ \sum_{k=1}^i \lambda \left( \sum_{m=1}^k \tau_{im} \cdot v_m \cdot \sigma_m \cdot \dot{q}_m \right) \cdot \tau_{ik} \cdot v_k \cdot \sigma_k \cdot \dot{q}_k \right\} \cdot t_{i(i)}^{(i)} + \\ &+ \lambda \left( \sum_{k=1}^i \tau_{ik} \cdot v_k \cdot \sigma_k \cdot \dot{q}_k \right) \cdot \lambda \left( \sum_{k=1}^i \tau_{ik} \cdot v_k \cdot \sigma_k \cdot \dot{q}_k \right) \cdot t_{i(i)}^{(i)} + \\ &+ \sum_{j=1}^i \lambda \left\{ \sum_{k=1}^j \lambda \left( \sum_{m=1}^k \tau_{im} \cdot v_m \cdot \sigma_m \cdot \dot{q}_m \right) \cdot \tau_{ik} \cdot v_k \cdot \sigma_k \cdot \dot{q}_k \right\} \cdot \tau_{0j} \cdot (v_j \cdot (1 - \sigma_j) \cdot q_j + l_j^{(j)}) + \\ &+ \sum_{j=1}^i \lambda \left( \sum_{k=1}^j \tau_{ik} \cdot v_k \cdot \sigma_k \cdot \dot{q}_k \right) \cdot \lambda \left( \sum_{k=1}^j \tau_{ik} \cdot v_k \cdot \sigma_k \cdot \dot{q}_k \right) \cdot \tau_{ij} \cdot (v_j \cdot (1 - \sigma_j) \cdot q_j + l_j^{(j)}) + \\ &+ 2 \cdot \sum_{j=1}^i \lambda \left( \sum_{k=1}^j \tau_{ik} \cdot v_k \cdot \sigma_k \cdot \dot{q}_k \right) \cdot \tau_{ij} \cdot v_j \cdot (1 - \sigma_j) \cdot \dot{q}_j. \end{aligned}$$

В первом и во втором слагаемых полученного равенства заменяем индекс суммирования  $k$  на  $j$ , а в третьем и в четвертом слагаемых заменяем индексы суммирования  $k$  на  $j$  и  $j$  на  $k$ :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^i \dot{D}_{ij}^{(i)} \cdot \dot{q}_j &= \sum_{j=1}^i \lambda \left( \sum_{m=1}^j \lambda (\tau_{im} \cdot v_m \cdot \sigma_m \cdot \dot{q}_m) \cdot \tau_{ij} \cdot v_j \cdot \sigma_j \right) \cdot t_{i(i)}^{(i)} \cdot \dot{q}_j + \\ &+ \sum_{j=1}^i \lambda (\tau_{ij} \cdot v_j \cdot \sigma_j) \cdot \sum_{j=1}^i \lambda (\tau_{ij} \cdot v_j \cdot \sigma_j) \cdot t_{i(i)}^{(i)} \cdot \dot{q}_j \cdot \dot{q}_j + \\ &+ \sum_{k=1}^i \sum_{j=1}^k \lambda \left\{ \sum_{m=1}^j \lambda (\tau_{im} \cdot v_m \cdot \sigma_m \cdot \dot{q}_m) \cdot \tau_{ij} \cdot v_j \cdot \sigma_j \right\} \cdot \tau_{ik} \cdot (v_k \cdot (1 - \sigma_k) \cdot q_k + l_k^{(k)}) \cdot \dot{q}_j + \\ &+ \sum_{k=1}^i \left\{ \sum_{j=1}^k \lambda (\tau_{ij} \cdot v_j \cdot \sigma_j) \right\}^2 \cdot \tau_{ik} \cdot (v_k \cdot (1 - \sigma_k) \cdot q_k + l_k^{(k)}) \cdot \dot{q}_j \cdot \dot{q}_j + \\ &+ \sum_{j=1}^i 2 \cdot \sum_{k=1}^j \lambda (\tau_{ik} \cdot v_k \cdot \sigma_k \cdot \dot{q}_k) \cdot \tau_{ij} \cdot v_j \cdot (1 - \sigma_j) \cdot \dot{q}_j. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \dot{D}_{ij}^{(i)} &= \lambda \left\{ \sum_{m=1}^j \lambda (\tau_{im} \cdot v_m \cdot \sigma_m \cdot \dot{q}_m) \cdot \tau_{ij} \cdot v_j \cdot \sigma_j \right\} \cdot t_{i(i)}^{(i)} + \lambda (\tau_{ij} \cdot v_j \cdot \sigma_j) \cdot \sum_{j=1}^i \lambda (\tau_{ij} \cdot v_j \cdot \sigma_j) \cdot t_{i(i)}^{(i)} \cdot \dot{q}_j + \\ &+ \sum_{k=j}^i \lambda \left\{ \sum_{m=1}^j \lambda (\tau_{im} \cdot v_m \cdot \sigma_m \cdot \dot{q}_m) \cdot \tau_{ij} \cdot v_j \cdot \sigma_j \right\} \cdot \tau_{ik} \cdot (v_k \cdot (1 - \sigma_k) \cdot q_k + l_k^{(k)}) + \\ &+ \left( \sum_{k=j}^i \lambda (\tau_{ij} \cdot v_j \cdot \sigma_j) \right)^2 \cdot \tau_{ik} \cdot (v_k \cdot (1 - \sigma_k) \cdot q_k + l_k^{(k)}) \cdot \dot{q}_j + \\ &+ 2 \cdot \sum_{k=1}^j \lambda (\tau_{ik} \cdot v_k \cdot \sigma_k \cdot \dot{q}_k) \cdot \tau_{ij} \cdot v_j \cdot (1 - \sigma_j). \end{aligned}$$

Из полученных соотношений следует, что линейные ускорения звеньев исполнительного механизма линейно зависят от вторых производных обобщенных координат (зависимость задается векторами  $D_{ij}^{(0)}$  и  $D_{ij}^{(i)}$ ) и квадратично — от первых производных обобщенных координат исполнительного механизма.

Из выражений для  $\dot{D}_{ij}^{(0)}$  и  $\dot{D}_{ij}^{(i)}$  можно выделить компоненты вида

$$2 \sum_{k=1}^j \lambda(\tau_{0k} \cdot v_k \cdot \sigma_k \cdot \dot{q}_k) \cdot \tau_{0j} \cdot v_j \cdot (1 - \sigma_j)$$

и

$$2 \sum_{k=1}^j \lambda(\tau_{ik} \cdot v_k \cdot \sigma_k \cdot \dot{q}_k) \cdot \tau_{ij} \cdot v_j \cdot (1 - \sigma_j).$$

Эти компоненты описывают ускорения *Кориолиса*, а также *центробежные* (пропорциональные вторым степеням производных одноименных координат вращательных пар) и *гироскопические ускорения* (пропорциональные произведениям производных разноименных координат).

## Контрольные вопросы и задания

1. Запишите соотношения для определения угловых ускорений звеньев в проекциях на оси СК стойки МР.

2. Какие величины определяют линейные и угловые ускорения звеньев исполнительного механизма МР?

## II. Динамика

Рассмотрим силы и моменты, действующие на звенья и шарниры исполнительного механизма, а также силы и моменты, развиваемые приводами манипулятора, приведем понятие обратной задачи динамики, выведем уравнения статического равновесия и уравнения движения исполнительного механизма МР.

### 8. Силы и моменты

#### 8.1. Силы, действующие на звенья

Вводим следующие обозначения (рис. 8.1):

$F_{Вi}^{(0)}$  — суммарный вектор приложенных к звену  $i$  внешних сил (в индексе — В), приведенный к центру масс звена  $i$ ;

$F_{Иi}^{(0)}$  — вектор сил инерции (в индексе — И)  $i$ -го звена, приведенный к центру масс звена  $i$ ;

$f_i^{(0)}$  — вектор сил реакции связей в месте сочленения звеньев  $i - 1$  и  $i$ , приложенный к звену  $i$  в точке, совпадающей с центром  $\{CK\}_{i-1}$  (к звену  $i - 1$  приложен равный по значению и противоположный по знаку вектор).

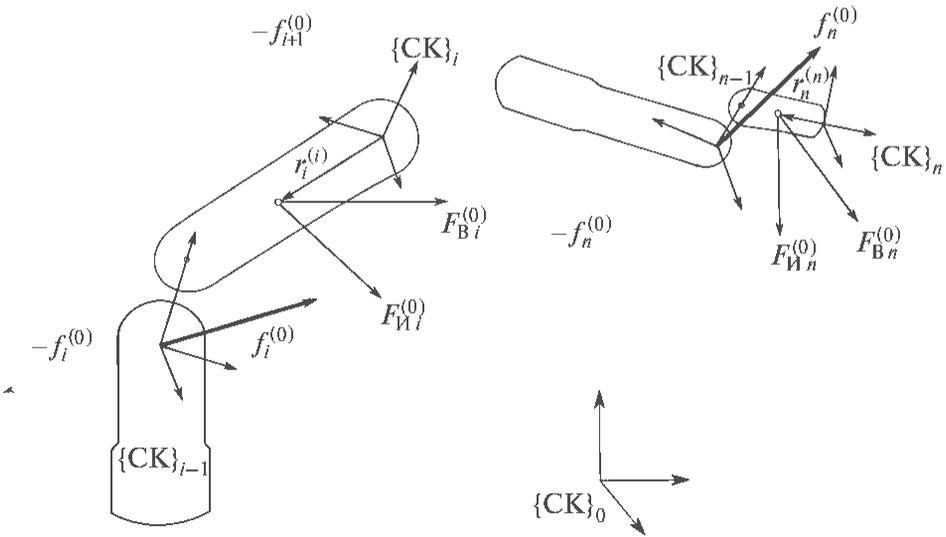


Рис. 8.1. Силы, действующие на звенья исполнительного механизма

Составляем уравнения кинестатического равновесия каждого из тел под действием внешних сил, сил реакций и сил инерции в проекциях на оси  $\{CK\}_0$ :

$$\begin{aligned}
 F_{Bn}^{(0)} + F_{In}^{(0)} + f_n^{(0)} &= 0, \\
 F_{Bn-1}^{(0)} + F_{In-1}^{(0)} + f_{n-1}^{(0)} - f_n^{(0)} &= 0, \\
 &\dots \\
 F_{Bi}^{(0)} + F_{Ii}^{(0)} + f_i^{(0)} - f_{i+1}^{(0)} &= 0, \\
 &\dots \\
 F_{B1}^{(0)} + F_{I1}^{(0)} + f_1^{(0)} - f_2^{(0)} &= 0.
 \end{aligned}$$

Из всех сил, действующих на каждое из звеньев, неизвестны только силы реакции связей:

$$\begin{aligned}
 f_n^{(0)} &= -\left(F_{Bn}^{(0)} + F_{In}^{(0)}\right), \\
 f_{n-1}^{(0)} &= -\left(F_{Bn-1}^{(0)} + F_{In-1}^{(0)}\right) + f_n^{(0)}, \\
 &\dots \\
 f_i^{(0)} &= -\left(F_{Bi}^{(0)} + F_{Ii}^{(0)}\right) + f_{i+1}^{(0)}, \\
 &\dots \\
 f_1^{(0)} &= -\left(F_{B1}^{(0)} + F_{I1}^{(0)}\right) + f_2^{(0)}.
 \end{aligned}$$

Выполнив последовательно, начиная со звена  $n$ , подстановку значений сил реакции связей в уравнения для  $n - 1, n - 2, \dots, 1$  звеньев, получаем

$$\begin{aligned}
 f_n^{(0)} &= -\left(F_{Bn}^{(0)} + F_{In}^{(0)}\right), \\
 f_{n-1}^{(0)} &= -\left(F_{Bn-1}^{(0)} + F_{In-1}^{(0)}\right) - \left(F_{Bn}^{(0)} + F_{In}^{(0)}\right), \\
 &\dots \\
 f_i^{(0)} &= -\left(F_{Bi}^{(0)} + F_{Ii}^{(0)}\right) - \left(F_{Bi+1}^{(0)} + F_{Ii+1}^{(0)}\right), \\
 &\dots \\
 f_1^{(0)} &= -\left(F_{B1}^{(0)} + F_{I1}^{(0)}\right) - \left(F_{B2}^{(0)} + F_{I2}^{(0)}\right).
 \end{aligned}$$

С учетом этого выражение для вектора сил реакции связей  $f_i^{(0)}$  принимает вид

$$f_i^{(0)} = -\sum_{j=i}^n (F_{Bj}^{(0)} + F_{Иj}^{(0)}), \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (8.1)$$

Выражение для вектора сил инерции  $j$ -го звена  $F_{Иj}^{(0)}$  имеет вид

$$F_{Иj}^{(0)} = -m_j \cdot \dot{V}_j^{(0)}. \quad (8.2)$$

Подставив соотношение для вектора сил инерции  $j$ -го звена  $F_{Иj}^{(0)}$  в формулу для расчета вектора сил реакции связей  $f_i^{(0)}$ , получаем

$$f_i^{(0)} = \sum_{j=i}^n (m_j \cdot \dot{V}_j^{(0)} - F_{Bj}^{(0)}), \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (8.3)$$

Соотношения (7.4) и (7.5) для определения линейных ускорений звеньев  $\dot{V}_j^{(0)}$  в проекциях на оси  $\{СК\}_0$  получены ранее (см. 7.2). В этих выражениях следует положить  $t_{j(j)}^{(j)} = r_j^{(j)}$ , так как расчет линейных ускорений необходимо проводить не для произвольной точки на  $j$ -м звене, а для центра масс звена  $j$ .

Из выражения (8.3) можно получить вектор сил реакции связей  $f_i^{(i)}$  в проекциях на оси связанных СК:

$$f_i^{(i)} = \sum_{j=i}^n \tau_{ij} \cdot (m_j \cdot \dot{V}_j^{(0)} - F_{Bj}^{(0)}) = \sum_{j=i}^n \tau_{ji}^T \cdot (m_j \cdot \dot{V}_j^{(0)} - F_{Bj}^{(0)}), \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (8.4)$$

Выражения (8.3) и (8.4) совместно с выражением для  $\dot{V}_j^{(0)}$  позволяют определить силы, действующие на звенья исполнительного механизма при его движении. Из них следует, что к звену  $i$  приложены все внешние силы, действующие на звенья с номерами от  $i$  до  $n$ , а также силы инерции, обусловленные движением этих звеньев. На первое звено исполнительного механизма действуют все внешние силы и силы инерции всех звеньев. Сила реакции связей  $f_1^{(0)}$  со стороны основания исполнительного механизма, действующая на первое звено, равна силе его воздействия на основание по модулю и обратна по направлению, т. е.  $-f_1^{(0)}$ .

## 8.2. Моменты, действующие на звенья

Вводим следующие обозначения (рис. 8.2):

$M_{Bi}^{(0)}$  — суммарный вектор моментов, приложенных к звену  $i$  внешних сил, относительно центра масс звена  $i$ ;

$M_{Иi}^{(0)}$  — вектор моментов сил инерции  $i$ -го звена относительно центра масс звена  $i$ ;

$\mu_i^{(0)}$  — вектор моментов сил реакции связей в месте сочленения звеньев  $i-1$  и  $i$ , приложенный к звену  $i$  в точке, совпадающей с центром  $\{CK\}_{i-1}$  (к звену  $i-1$  приложен равный по величине и противоположный по знаку вектор).

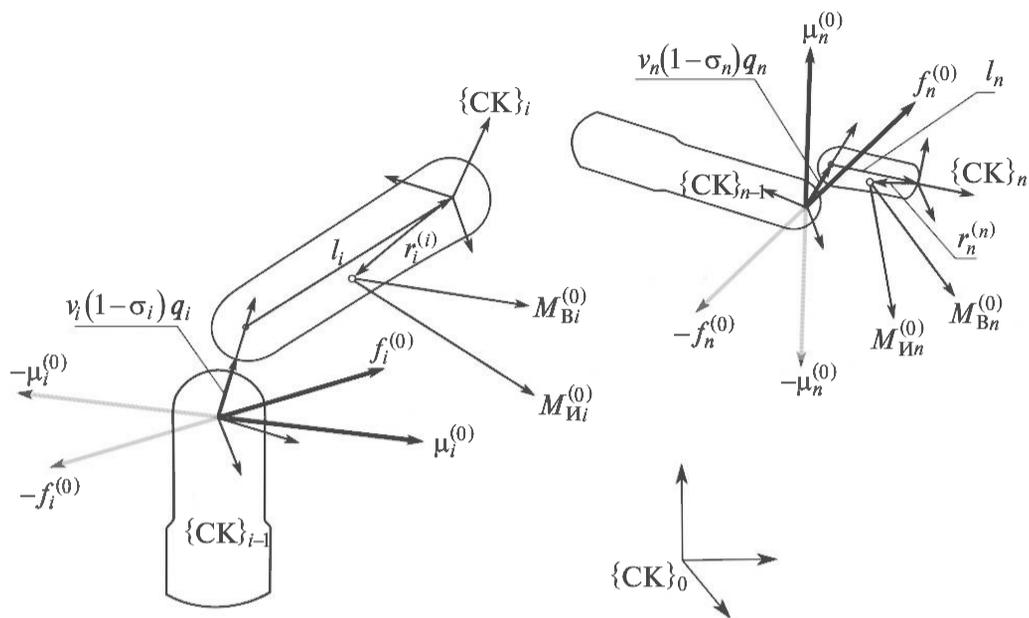


Рис. 8.2. Моменты, действующие на звенья исполнительного механизма

Составляем уравнения кинестатического равновесия каждого из тел под действием внешних моментов, моментов реакции связей и моментов сил инерции в проекциях на оси  $\{CK\}_0$ :

$$M_{Bn}^{(0)} + M_{Иn}^{(0)} + \mu_n^{(0)} - \lambda \left( \tau_{0n} \cdot \left( v_n \cdot (1 - \sigma_n) \cdot q_n + l_n^{(n)} + r_n^{(n)} \right) \right) \cdot f_n^{(0)} = 0,$$

$$M_{Bn-1}^{(0)} + M_{Иn-1}^{(0)} + \mu_{n-1}^{(0)} - \mu_n^{(0)} - \lambda \left( \tau_{0n-1} \cdot \left( v_{n-1} \cdot (1 - \sigma_{n-1}) \cdot q_{n-1} + l_{n-1}^{(n-1)} + r_{n-1}^{(n-1)} \right) \right) \cdot f_{n-1}^{(0)} + \lambda \left( \tau_{0n-1} \cdot \left( -r_{n-1}^{(n-1)} \right) \right) \cdot \left( -f_n^{(0)} \right) = 0,$$

...

$$M_{Bi}^{(0)} + M_{Иi}^{(0)} + \mu_i^{(0)} - \mu_{i+1}^{(0)} - \lambda \left( \tau_{0i} \cdot \left( v_i \cdot (1 - \sigma_i) \cdot q_i + l_i^{(i)} + r_i^{(i)} \right) \right) \cdot f_i^{(0)} + \lambda \left( \tau_{0i} \cdot \left( -r_i^{(i)} \right) \right) \cdot \left( -f_{i+1}^{(0)} \right) = 0,$$

...

$$M_{B1}^{(0)} + M_{И1}^{(0)} + \mu_1^{(0)} - \mu_2^{(0)} - \lambda \left( \tau_{01} \cdot \left( v_1 \cdot (1 - \sigma_1) \cdot q_1 + l_1^{(1)} + r_1^{(1)} \right) \right) \cdot f_1^{(0)} + \lambda \left( \tau_{01} \cdot \left( -r_1^{(1)} \right) \right) \cdot \left( -f_2^{(0)} \right) = 0.$$

Из всех моментов, действующих на каждое из звеньев, неизвестны только моменты реакции связей:

$$\mu_n^{(0)} = -\left(M_{\mathbb{B}n}^{(0)} + M_{\mathbb{H}n}^{(0)}\right) + \lambda\left(\tau_{0n} \cdot \left(v_n \cdot (1 - \sigma_n) \cdot q_n + l_n^{(n)} + r_n^{(n)}\right)\right) \cdot f_n^{(0)},$$

$$\begin{aligned} \mu_{n-1}^{(0)} &= -\left(M_{\mathbb{B}n-1}^{(0)} + M_{\mathbb{H}n-1}^{(0)}\right) + \mu_n^{(0)} + \\ &+ \lambda\left(\tau_{0n-1} \cdot \left(v_{n-1} \cdot (1 - \sigma_{n-1}) \cdot q_{n-1} + l_{n-1}^{(n-1)} + r_{n-1}^{(n-1)}\right)\right) \cdot f_{n-1}^{(0)} - \lambda\left(\tau_{0n-1} \cdot r_{n-1}^{(n-1)}\right) \cdot f_n^{(0)}, \end{aligned}$$

...

$$\mu_i^{(0)} = -\left(M_{\mathbb{B}i}^{(0)} + M_{\mathbb{H}i}^{(0)}\right) + \mu_{i+1}^{(0)} + \lambda\left(\tau_{0i} \cdot \left(v_i \cdot (1 - \sigma_i) \cdot q_i + l_i^{(i)} + r_i^{(i)}\right)\right) \cdot f_i^{(0)} - \lambda\left(\tau_{0i} \cdot r_i^{(i)}\right) \cdot f_{i+1}^{(0)},$$

...

$$\mu_1^{(0)} = -\left(M_{\mathbb{B}1}^{(0)} + M_{\mathbb{H}1}^{(0)}\right) + \mu_2^{(0)} + \lambda\left(\tau_{01} \cdot \left(v_1 \cdot (1 - \sigma_1) \cdot q_1 + l_1^{(1)} + r_1^{(1)}\right)\right) \cdot f_1^{(0)} - \lambda\left(\tau_{01} \cdot r_1^{(1)}\right) \cdot f_1^{(0)}.$$

Выполнив последовательно, начиная от звена  $n$ , подстановку значений моментов сил реакции связей в уравнения для  $n - 1, n - 2, \dots, 1$  звеньев, получаем

$$\mu_n^{(0)} = -\left(M_{\mathbb{B}n}^{(0)} + M_{\mathbb{H}n}^{(0)}\right) + \lambda\left(\tau_{0n} \cdot \left(v_n \cdot (1 - \sigma_n) \cdot q_n + l_n^{(n)} + r_n^{(n)}\right)\right) \cdot f_n^{(0)},$$

$$\begin{aligned} \mu_{n-1}^{(0)} &= -\sum_{j=n-1}^n \left(M_{\mathbb{B}j}^{(0)} + M_{\mathbb{H}j}^{(0)}\right) + \\ &+ \sum_{j=n-1}^n \lambda\left(\tau_{0j} \cdot \left(v_j \cdot (1 - \sigma_j) \cdot q_j + l_j^{(j)} + r_j^{(j)}\right)\right) \cdot f_j^{(0)} - \lambda\left(\tau_{0n-1} \cdot r_{n-1}^{(n-1)}\right) \cdot f_n^{(0)}, \end{aligned}$$

...

$$\begin{aligned} \mu_i^{(0)} &= -\sum_{j=i}^n \left(M_{\mathbb{B}j}^{(0)} + M_{\mathbb{H}j}^{(0)}\right) + \\ &+ \sum_{j=i}^n \lambda\left(\tau_{0j} \cdot \left(v_j \cdot (1 - \sigma_j) \cdot q_j + l_j^{(j)} + r_j^{(j)}\right)\right) \cdot f_j^{(0)} - \sum_{j=i}^{n-1} \lambda\left(\tau_{0j} \cdot r_j^{(j)}\right) \cdot f_{j+1}^{(0)}, \end{aligned}$$

...

$$\begin{aligned} \mu_1^{(0)} &= -\sum_{j=1}^n \left(M_{\mathbb{B}j}^{(0)} + M_{\mathbb{H}j}^{(0)}\right) + \\ &+ \sum_{j=1}^n \lambda\left(\tau_{0j} \cdot \left(v_j \cdot (1 - \sigma_j) \cdot q_j + l_j^{(j)} + r_j^{(j)}\right)\right) \cdot f_j^{(0)} - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda\left(\tau_{0j} \cdot r_j^{(j)}\right) \cdot f_{j+1}^{(0)}. \end{aligned}$$

Согласно равенству (8.1)  $f_j^{(0)} = -\sum_{k=j}^n (F_{Bk}^{(0)} + F_{Ik}^{(0)})$ , выражение для вектора моментов сил реакции связей  $\mu_i^{(0)}$  принимает вид

$$\begin{aligned} \mu_i^{(0)} &= -\sum_{j=i}^n (M_{Bj}^{(0)} + M_{Иj}^{(0)}) - \sum_{j=i}^n \lambda \left( \tau_{0j} \cdot (\mathbf{v}_j \cdot (1 - \sigma_j) \cdot \mathbf{q}_j + l_j^{(j)} + r_j^{(j)}) \right) \cdot \sum_{k=j}^n (F_{Bk}^{(0)} + F_{Ik}^{(0)}) + \\ &\quad + \sum_{j=i}^{n-1} \lambda \left( \tau_{0j} \cdot r_j^{(j)} \right) \cdot \sum_{k=j+1}^n (F_{Bk}^{(0)} + F_{Ik}^{(0)}) = \\ &= -\sum_{j=i}^n (M_{Bj}^{(0)} + M_{Иj}^{(0)}) - \sum_{j=i}^n \lambda \left( \tau_{0j} \cdot (\mathbf{v}_j \cdot (1 - \sigma_j) \cdot \mathbf{q}_j + l_j^{(j)}) \right) \cdot \sum_{k=j}^n (F_{Bk}^{(0)} + F_{Ik}^{(0)}) - \\ &\quad - \sum_{j=i}^n \lambda \left( \tau_{0j} \cdot r_j^{(j)} \right) \cdot \sum_{k=j}^n (F_{Bk}^{(0)} + F_{Ik}^{(0)}) + \sum_{j=i}^{n-1} \lambda \left( \tau_{0j} \cdot r_j^{(j)} \right) \cdot \sum_{k=j+1}^n (F_{Bk}^{(0)} + F_{Ik}^{(0)}). \end{aligned}$$

Рассмотрим два последних слагаемых с точки зрения их пределов суммирования. Нетрудно убедиться в справедливости равенства

$$-\sum_{j=i}^n (j) \cdot \sum_{k=j}^n (k) + \sum_{j=i}^{n-1} (j) \cdot \sum_{k=j+1}^n (k) = -\sum_{j=i}^n (j) \cdot (k = j).$$

Тогда сумму двух последних слагаемых можно записать как

$$\begin{aligned} -\sum_{j=i}^n \lambda \left( \tau_{0j} \cdot r_j^{(j)} \right) \cdot \sum_{k=j}^n (F_{Bk}^{(0)} + F_{Ik}^{(0)}) + \sum_{j=i}^{n-1} \lambda \left( \tau_{0j} \cdot r_j^{(j)} \right) \cdot \sum_{k=j+1}^n (F_{Bk}^{(0)} + F_{Ik}^{(0)}) = \\ = -\sum_{j=i}^n \lambda \left( \tau_{0j} \cdot r_j^{(j)} \right) \cdot (F_{Bj}^{(0)} + F_{Иj}^{(0)}). \end{aligned}$$

С учетом этого для вектора моментов сил реакции связей  $\mu_i^{(0)}$  получаем выражение

$$\begin{aligned} \mu_i^{(0)} &= -\sum_{j=i}^n (M_{Bj}^{(0)} + M_{Иj}^{(0)}) - \sum_{j=i}^n \lambda \left( \tau_{0j} \cdot (\mathbf{v}_j \cdot (1 - \sigma_j) \cdot \mathbf{q}_j + l_j^{(j)}) \right) \cdot \sum_{k=j}^n (F_{Bk}^{(0)} + F_{Ik}^{(0)}) - \\ &\quad - \sum_{j=i}^n \lambda \left( \tau_{0j} \cdot r_j^{(j)} \right) \cdot (F_{Bj}^{(0)} + F_{Иj}^{(0)}), \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Для вектора моментов сил инерции  $M_{Иj}^{(0)}$  можем записать:

$$M_{Иj}^{(0)} = -\frac{d \left( J_j^{(j)} \cdot \omega_j^{(j)} \right)^{(0)}}{dt} - \lambda \left( \omega_j^{(0)} \right) \cdot \left( J_j^{(j)} \cdot \omega_j^{(j)} \right)^{(0)}. \quad (8.5)$$

Соотношения (5.4) и (5.7) для определения угловых скоростей звеньев  $\omega_j^{(j)}$  были получены в пп. 5.1 и 5.3. В выражении (8.5) сомножитель  $(J_j^{(j)} \cdot \omega_j^{(j)})^{(0)}$  — вектор момента количества движения звена  $j$  в  $\{СК\}_0$ , который можно представить так:

$$(J_j^{(j)} \cdot \omega_j^{(j)})^{(0)} = \tau_{0j} \cdot (J_j^{(j)} \cdot \tau_{j0} \cdot \omega_j^{(0)}) = (\tau_{0j} \cdot J_j^{(j)} \cdot \tau_{j0}) \cdot \omega_j^{(0)} = J_j^{(0)} \cdot \omega_j^{(0)},$$

где  $J_j^{(0)} = \tau_{0j} \cdot J_j^{(j)} \cdot \tau_{j0}$  — тензор инерции звена  $j$  в СК, оси которой параллельны осям  $\{СК\}_0$ , а начало совмещено с центром масс звена  $j$ .

Аналогично

$$\frac{d(J_j^{(j)} \cdot \omega_j^{(j)})^{(0)}}{dt} = J_j^{(0)} \cdot \dot{\omega}_j^{(0)}.$$

Соотношения (7.1) и (7.2) для определения угловых ускорений звеньев  $\dot{\omega}_j^{(0)}$  получены в п. 7.1.

Справедливость выражения  $J_j^{(0)} = \tau_{0j} \cdot J_j^{(j)} \cdot \tau_{j0}$  следует из того, что

$$\begin{aligned} J_j^{(0)} &= \sum_{vj} \lambda(r_{vj}^{(0)}) \cdot m_{vj} \cdot \lambda^T(r_{vj}^{(0)}) = \sum_{vj} \lambda(\tau_{0j} \cdot r_{vj}^{(j)}) \cdot m_{vj} \cdot \lambda^T(\tau_{0j} \cdot r_{vj}^{(j)}) = \\ &= \sum_{vj} \tau_{0j} \cdot \lambda(r_{vj}^{(j)}) \cdot m_{vj} \cdot \tau_{0j} \cdot \lambda^T(r_{vj}^{(j)}) = \tau_{0j} \cdot \left( \sum_{vj} \lambda(r_{vj}^{(j)}) \cdot m_{vj} \cdot \lambda^T(r_{vj}^{(j)}) \right) \cdot \tau_{0j} = \tau_{0j} \cdot J_j^{(j)} \cdot \tau_{j0}, \end{aligned}$$

где  $m_{vj}$  — масса  $v$ -й точки  $j$ -го звена;  $r_{vj}^{(j)}$  — радиус-вектор этой точки в  $\{СК\}_j$ .

Подставив соотношение для вектора моментов сил инерции  $M_{Иj}^{(0)}$  (8.5) и для вектора сил инерции  $F_{Иj}^{(0)}$  (8.2) в формулу для расчета вектора моментов сил реакции связей  $\mu_i^{(0)}$ , получаем

$$\begin{aligned} \mu_i^{(0)} &= \sum_{j=i}^n (J_j^{(0)} \cdot \dot{\omega}_j^{(0)} + \lambda(\omega_j^{(0)}) \cdot J_j^{(0)} \cdot \omega_j^{(0)} - M_{Bj}^{(0)}) + \\ &+ \sum_{j=i}^n \lambda(\tau_{0j} \cdot (v_j \cdot (1 - \sigma_j) \cdot q_j + l_j^{(j)})) \cdot \sum_{k=j}^n (m_k \cdot \dot{V}_k^{(0)} - F_{Bk}^{(0)}) + \\ &+ \sum_{j=i}^n \lambda(\tau_{0j} \cdot r_j^{(j)}) \cdot (m_j \cdot \dot{V}_j^{(0)} - F_{Bj}^{(0)}), \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Последнее выражение можно преобразовать. Рассмотрим отдельно второе и третье слагаемые в этом выражении. Во втором слагаемом заменяем обозначения  $j$  и  $k$  для индексов суммирования, а затем изменяем порядок суммирования:

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=i}^n \lambda \left( \tau_{0k} \cdot \left( \mathbf{v}_k \cdot (1 - \sigma_k) \cdot \mathbf{q}_k + l_k^{(k)} \right) \right) \cdot \sum_{j=k}^n \left( m_j \cdot \dot{V}_j^{(0)} - F_{\mathbf{B}j}^{(0)} \right) + \\
& \quad + \sum_{j=i}^n \lambda \left( \tau_{0j} \cdot \mathbf{r}_j^{(j)} \right) \cdot \left( m_j \cdot \dot{V}_j^{(0)} - F_{\mathbf{B}j}^{(0)} \right) = \\
& = \sum_{j=i}^n \sum_{k=i}^j \lambda \left( \tau_{0k} \cdot \left( \mathbf{v}_k \cdot (1 - \sigma_k) \cdot \mathbf{q}_k + l_k^{(k)} \right) \right) \cdot \left( m_j \cdot \dot{V}_j^{(0)} - F_{\mathbf{B}j}^{(0)} \right) + \\
& \quad + \sum_{j=i}^n \lambda \left( \tau_{0j} \cdot \mathbf{r}_j^{(j)} \right) \cdot \left( m_j \cdot \dot{V}_j^{(0)} - F_{\mathbf{B}j}^{(0)} \right) = \\
& = \sum_{j=i}^n \lambda \left( \sum_{k=i}^j \tau_{0k} \cdot \left( \mathbf{v}_k \cdot (1 - \sigma_k) \cdot \mathbf{q}_k + l_k^{(k)} \right) + \tau_{0j} \cdot \mathbf{r}_j^{(j)} \right) \cdot \left( m_j \cdot \dot{V}_j^{(0)} - F_{\mathbf{B}j}^{(0)} \right).
\end{aligned}$$

Принимая во внимание выражение (5.15) для  $R_{ij}^{(0)}$  и поменяв в нем индексы  $i$  и  $j$  местами, а также то, что  $\mathbf{t}_{j(j)}^{(j)} = \mathbf{r}_{j(j)}^{(j)}$ , можно записать выражение для  $R_{ji}^{(0)}$ :

$$R_{ji}^{(0)} = \tau_{0j} \cdot \mathbf{t}_{j(j)}^{(j)} + \sum_{k=i}^j \tau_{0k} \cdot \left( \mathbf{v}_k \cdot (1 - \sigma_k) \cdot \mathbf{q}_k + l_k^{(k)} \right).$$

С учетом выполненных преобразований выражение для расчета момента реакции связей  $\mu_i^{(0)}$  принимает вид

$$\begin{aligned}
\mu_i^{(0)} &= \sum_{j=i}^n \left( J_j^{(0)} \cdot \dot{\omega}_j^{(0)} + \lambda \left( \omega_j^{(0)} \right) \cdot J_j^{(0)} \cdot \omega_j^{(0)} - M_{\mathbf{B}j}^{(0)} + \lambda \left( R_{ji}^{(0)} \right) \cdot \left( m_j \cdot \dot{V}_j^{(0)} - F_{\mathbf{B}j}^{(0)} \right) \right), \quad (8.6) \\
& \quad i = 1, 2, \dots, n.
\end{aligned}$$

Из уравнения (8.6) можно получить выражение для расчета момента реакции связей  $\mu_i^{(i)}$  в проекциях на оси связанных СК:

$$\begin{aligned}
\mu_i^{(i)} &= \sum_{j=i}^n \tau_{ij} \cdot \left( J_j^{(0)} \cdot \dot{\omega}_j^{(0)} + \lambda \left( \omega_j^{(0)} \right) \cdot J_j^{(0)} \cdot \omega_j^{(0)} - M_{\mathbf{B}j}^{(0)} + \lambda \left( R_{ji}^{(0)} \right) \cdot \left( m_j \cdot \dot{V}_j^{(0)} - F_{\mathbf{B}j}^{(0)} \right) \right) = \\
& = \sum_{j=i}^n \tau_{ji}^T \cdot \left( J_j^{(0)} \cdot \dot{\omega}_j^{(0)} + \lambda \left( \omega_j^{(0)} \right) \cdot J_j^{(0)} \cdot \omega_j^{(0)} - M_{\mathbf{B}j}^{(0)} + \lambda \left( R_{ji}^{(0)} \right) \cdot \left( m_j \cdot \dot{V}_j^{(0)} - F_{\mathbf{B}j}^{(0)} \right) \right), \quad (8.7) \\
& \quad i = 1, 2, \dots, n.
\end{aligned}$$

Выражения (8.6) и (8.7) совместно с выражениями для расчета величин  $\omega_j^{(0)}$ ,  $\dot{\omega}_j^{(0)}$  позволяют определить моменты, действующие на звенья исполнительного механизма при его движении. К звену  $i$  приложены все внешние моменты, действующие на звенья с номерами от  $i$  до  $n$ , а также моменты сил инерции, обусловленные движением этих звеньев. На первое звено исполнительного механизма действуют все внешние моменты и моменты сил инерции всех звеньев. Момент реакции связей  $\mu_1^{(0)}$  со стороны основания испол-

нительного механизма, действующий на первое звено, равен моменту реакции его связей на основании по модулю и противоположен по направлению, т. е.  $-\mu_1^{(0)}$ .

### 8.3. Силы и моменты, действующие вдоль осей шарниров

Ось шарнира с номером  $i$  совпадает с осью  $Z_{i-1}$   $\{CK\}_{i-1}$ . Поэтому для определения сил, действующих вдоль осей шарниров, следует, во-первых, векторы сил реакций связей в уравнениях (8.3) и (8.4) перевести в  $\{CK\}_{i-1}$  из  $\{CK\}_0$  и  $\{CK\}_i$  соответственно, во-вторых, спроецировать получившиеся векторы на оси  $Z_{i-1}$   $\{CK\}_{i-1}$ :

$$f_{Z_i}^{(i-1)} = e^T \cdot \tau_{i-1} \cdot \tau_{i0} \cdot \sum_{j=i}^n (m_j \cdot \dot{V}_j^{(0)} - F_{Bj}^{(0)}) = v_i^T \cdot \tau_{i0} \cdot \sum_{j=i}^n (m_j \cdot \dot{V}_j^{(0)} - F_{Bj}^{(0)}), \quad i=1, 2, \dots, n, \quad (8.8)$$

поскольку  $e^T \cdot \tau_{i-1} = v_i$ .

Силы, с которыми исполнительный механизм воздействует на оси шарниров, равны  $-f_{Z_i}^{(i-1)}$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ).

Для определения моментов, действующих вдоль осей шарниров, следует, во-первых, векторы моментов реакций связей в уравнениях (8.6) и (8.7) перевести в  $\{CK\}_{i-1}$  из  $\{CK\}_0$  и  $\{CK\}_i$  соответственно, во-вторых, спроецировать получившиеся векторы на оси  $Z_{i-1}$   $\{CK\}_{i-1}$ . По аналогии с силами, действующими вдоль осей шарниров, можно записать выражение

$$\mu_{Z_i}^{(i-1)} = v_i^T \cdot \tau_{i0} \cdot \sum_{j=i}^n \left( J_j^{(0)} \cdot \dot{\omega}_j^{(0)} + \lambda(\omega_j^{(0)}) \cdot J_j^{(0)} \cdot \omega_j^{(0)} - M_{Bj}^{(0)} + \lambda(R_{ji}^{(0)}) \cdot (m_j \cdot \dot{V}_j^{(0)} - F_{Bj}^{(0)}) \right), \quad (8.9)$$

$$i=1, 2, \dots, n.$$

Моменты, с которыми исполнительный механизм воздействует на оси шарниров, равны  $-\mu_{Z_i}^{(i-1)}$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ).

### 8.4. Силы и моменты, развиваемые приводами манипулятора. Обратная задача динамики

Силы и моменты, развиваемые приводами манипулятора, определяются из выражения (8.8), если соответствующий шарнир ПТ, или из выражения (8.9), если шарнир ВТ.

Для того чтобы учесть тип шарнира, воспользуемся множителями-индикаторами  $\sigma_i$ . Обозначим

$$\mu_{Di} = (1 - \sigma_i) \cdot f_i + \sigma_i \cdot \mu_i,$$

где  $f_i$  — сила, развиваемая  $i$ -м приводом;  $\mu_i$  — момент, развиваемый  $i$ -м приводом.

Силы и моменты, развиваемые приводами, действуют вдоль осей шарниров. Следует помнить, что сила и момент привода с номером  $i$  действует вдоль оси  $Z_{i-1}$  {СК} $\}_{i-1}$ . Тогда

$$\mu_{Дi} = (1 - \sigma_i) \cdot f_{Zi}^{(i-1)} + \sigma_i \cdot \mu_{Zi}^{(i-1)}.$$

Подставив в последнее выражение уравнение для определения значений сил (8.8) и уравнение для определения значений моментов (8.9), развиваемых приводами, получаем

$$\begin{aligned} \mu_{Дi} = & (1 - \sigma_i) \cdot \mathbf{v}_i^T \cdot \tau_{i0} \cdot \sum_{j=i}^n (m_j \cdot \dot{V}_j^{(0)} - F_{Bj}^{(0)}) + \\ & + \sigma_i \cdot \mathbf{v}_i^T \cdot \tau_{i0} \cdot \sum_{j=i}^n (J_j^{(0)} \cdot \dot{\omega}_j^{(0)} + \lambda(\omega_j^{(0)}) \cdot J_j^{(0)} \cdot \omega_j^{(0)} - M_{Bj}^{(0)}) + \\ & + \sigma_i \cdot \mathbf{v}_i^T \cdot \tau_{i0} \cdot \sum_{j=i}^n \lambda(R_{ji}^{(0)}) (m_j \cdot \dot{V}_j^{(0)} - F_{Bj}^{(0)}), \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Отмечаем, что справедливы следующие равенства:

для  $c_j^{(0)}$

$$\sigma_i \cdot \mathbf{v}_i^T \cdot \tau_{i0} = c_i^{(0)T}, \text{ согласно выражению (5.5),}$$

для  $D_{ij}^{(0)VT}$

$$(1 - \sigma_i) \cdot \mathbf{v}_i^T \cdot \tau_{i0} = D_{ji}^{(0)VT}, \text{ согласно выражению (5.13),}$$

для  $D_{ij}^{(0)\omega}$

$$\sigma_i \cdot \mathbf{v}_i^T \cdot \tau_{i0} \cdot \lambda(R_{ji}^{(0)}) = D_{ji}^{(0)\omega T}, \text{ согласно выражению (5.14),}$$

так как

$$\begin{aligned} (D_{ji}^{(0)\omega})^T &= (\lambda(\tau_{0i} \cdot \mathbf{v}_i \cdot \sigma)_i \cdot R_{ji}^{(0)})^T = (-\lambda(R_{ji}^{(0)}) \cdot c_i^{(0)})^T = c_i^{(0)T} \cdot (-\lambda(R_{ji}^{(0)}))^T = \\ &= \sigma_i \cdot \mathbf{v}_i^T \cdot \tau_{i0} \cdot \lambda(R_{ji}^{(0)}). \end{aligned}$$

С учетом изложенного выражение для  $\mu_{Дi}$  принимает вид

$$\begin{aligned} \mu_{Дi} = & \sum_{j=i}^n D_{ji}^{(0)VT} \cdot (m_j \cdot \dot{V}_j^{(0)} - F_{Bj}^{(0)}) + c_i^{(0)T} \cdot \sum_{j=i}^n (J_j^{(0)} \cdot \dot{\omega}_j^{(0)} + \lambda(\omega_j^{(0)}) \cdot J_j^{(0)} \cdot \omega_j^{(0)} - M_{Bj}^{(0)}) + \\ & + \sum_{j=i}^n D_{ji}^{(0)\omega T} \cdot (m_j \cdot \dot{V}_j^{(0)} - F_{Bj}^{(0)}), \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Согласно выражению (5.12), справедливо равенство  $D_{ij}^{(0)T} = D_{ij}^{(0)VT} + D_{ij}^{(0)\omega T}$ , поэтому последнее соотношение можем представить в виде

$$\begin{aligned} \mu_{Di} = & c_i^{(0)T} \cdot \sum_{j=i}^n \left( J_j^{(0)} \cdot \dot{\omega}_j^{(0)} + \lambda(\omega_j^{(0)}) \cdot J_j^{(0)} \cdot \omega_j^{(0)} - M_{B_j}^{(0)} \right) + \\ & + \sum_{j=i}^n D_{ji}^{(0)T} \cdot \left( m_j \cdot \dot{V}_j^{(0)} - F_{B_j}^{(0)} \right), \quad i=1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (8.10)$$

Уравнение (8.10) совместно с полученными ранее выражениями для  $\omega_j^{(0)}$ ,  $\dot{\omega}_j^{(0)}$ ,  $\dot{V}_j^{(0)}$  позволяет определить силы и моменты, которые развивают приводы при известных параметрах движения звеньев исполнительного механизма ( $q_i$ ,  $\dot{q}_i$ ,  $\ddot{q}_i$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ ). Определение сил и моментов, развиваемых приводами по заданным параметрам движения, носит название *обратной задачи динамики* (ОЗД) исполнительного механизма.

Очевидно, что для расчета сил и моментов приводов и скоростей звеньев исполнительного механизма используют одни и те же компоненты — векторы  $c_i^{(0)}$  и  $D_{ji}^{(0)}$  ( $i=1, 2, \dots, n, j=1, \dots, i$ ), причем в уравнения сил (моментов) эти векторы входят в транспонированном виде. Таким образом, можно говорить о *симметрии уравнений ОЗД и уравнений для определения скоростей звеньев* исполнительного механизма.

Произведение каких-либо двух векторов вида  $a^{(c)T} \cdot b^{(c)}$  есть координатная запись скалярного произведения векторов  $a$  и  $b$ , представленных в проекциях на оси  $\{СК\}_c$ , т. е. векторов  $a^{(c)}$  и  $b^{(c)}$ . Исходя из этого момент и сила, действующие на  $i$ -й привод исполнительного механизма, есть сумма скалярных произведений векторов  $c_i^{(0)}$  и  $\left( J_j^{(0)} \cdot \dot{\omega}_j^{(0)} + \lambda(\omega_j^{(0)}) \cdot J_j^{(0)} \cdot \omega_j^{(0)} - M_{B_j}^{(0)} \right)$  плюс сумма скалярных произведений векторов  $D_{ji}^{(0)}$  и  $\left( m_j \cdot \dot{V}_j^{(0)} - F_{B_j}^{(0)} \right)$  при  $i=1, 2, \dots, n, j=1, \dots, i$ .

## 8.5. Уравнения статического равновесия

Положим, что  $\omega_j^{(0)} = \dot{\omega}_j^{(0)} = \dot{V}_j^{(0)} = 0$  для всех  $j$ , иными словами, считаем исполнительный механизм неподвижным. Тогда из уравнения (8.10) следует, что

$$c_i^{(0)T} \cdot \sum_{j=i}^n M_{B_j}^{(0)} + \sum_{j=i}^n D_{ji}^{(0)T} \cdot F_{B_j}^{(0)} + \mu_{Di} = 0, \quad i=1, 2, \dots, n.$$

Полученные уравнения называются *уравнениями статического равновесия* исполнительного механизма.

## Контрольные вопросы и задания

1. Как определяются силы и моменты, действующие на звенья исполнительного механизма МР при его движении?

2. Запишите выражения для векторов сил и моментов реакции связей.
3. Какие величины определяют силы и моменты, действующие вдоль осей шарниров исполнительного механизма МР?
4. Как определяются силы и моменты, развиваемые приводами манипулятора?
5. В чем состоит обратная задача динамики МР?

## 9. Уравнения движения. Прямая задача динамики

### 9.1. Получение уравнений движения

Уравнения движения исполнительного механизма позволяют определить параметры его движения ( $q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i; i = 1, 2, \dots, n$ ) по известным силам и моментам, развиваемым приводами, а также по известным внешним силам и моментам. Решение этих уравнений определяет сущность *прямой задачи динамики* исполнительного механизма (ПЗД).

Для решения ПЗД следует составить соотношения, связывающие между собой  $\mu_{Di}, F_{Bj}, M_{Bj}$  и искомые параметры движения исполнительного механизма, и решить их относительно искомых переменных. Достаточно подставить в уравнение (8.10) выражения для расчета  $\dot{\omega}_j^{(0)}, \dot{V}_j^{(0)}$  и решить полученные соотношения относительно старших производных  $q_i$ .

Выполнив подстановку, получаем выражение

$$\sum_{j=i}^n c_i^{(0)T} \left( J_j^{(0)} \left( \sum_{k=1}^j \dot{c}_k^{(0)} \cdot \dot{q}_k + \sum_{k=1}^j c_k^{(0)} \cdot \ddot{q}_k \right) + \lambda(\omega_j^{(0)}) \cdot J_j^{(0)} \cdot \omega_j^{(0)} \right) + \sum_{j=i}^n D_{ji}^{(0)T} \cdot m_j \left( \sum_{k=1}^j \dot{D}_{jk}^{(0)} \cdot \dot{q}_k + \sum_{k=1}^j D_{jk}^{(0)} \cdot \ddot{q}_k \right) = \mu_{Di} + \sum_{j=i}^n c_i^{(0)} \cdot M_{Bj}^{(0)} + \sum_{j=i}^n D_{ji}^{(0)T} \cdot F_{Bj}^{(0)}.$$

Обозначим сумму слагаемых, содержащих производные обобщенных координат в первой степени, в левой части полученного соотношения, а также  $\omega_j^{(0)}$  как  $b_i$ , т. е.

$$\sum_{j=i}^n c_i^{(0)T} \left( J_j^{(0)} \sum_{k=1}^j \dot{c}_k^{(0)} \cdot \dot{q}_k + \lambda(\omega_j^{(0)}) \cdot J_j^{(0)} \cdot \omega_j^{(0)} \right) + \sum_{j=i}^n D_{ji}^{(0)T} \cdot m_j \sum_{k=1}^j \dot{D}_{jk}^{(0)} \cdot \dot{q}_k = b_i. \quad (9.1)$$

Оставшиеся в левой части рассматриваемого соотношения слагаемые, содержащие вторые производные обобщенных координат, преобразуем следующим образом:

$$\sum_{j=i}^n c_i^{(0)T} \cdot J_j^{(0)} \sum_{k=1}^j c_k^{(0)} \cdot \ddot{q}_k + \sum_{j=i}^n D_{ji}^{(0)T} \cdot m_j \sum_{k=1}^j D_{jk}^{(0)} \cdot \ddot{q}_k = \sum_{j=i}^n \sum_{k=1}^j c_i^{(0)T} \cdot J_j^{(0)} \cdot c_k^{(0)} \cdot \ddot{q}_k + \sum_{j=i}^n \sum_{k=1}^j D_{ji}^{(0)T} \cdot m_j \cdot D_{jk}^{(0)} \cdot \ddot{q}_k = \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{j=i \text{ if } k \leq i \\ j=k \text{ if } k > i}} c_i^{(0)T} \cdot J_j^{(0)} \cdot c_k^{(0)} \cdot \ddot{q}_k + \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{j=i \text{ if } k \leq i \\ j=k \text{ if } k > i}} D_{ji}^{(0)T} \cdot m_j \cdot D_{jk}^{(0)} \cdot \ddot{q}_k.$$

Проводим переименование индексов  $j$  на  $k$ ,  $k$  на  $j$  и группируем подобные члены:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{j=i \text{ if } k \leq i \\ j=k \text{ if } k > i}}^n c_i^{(0)T} \cdot J_j^{(0)} \cdot c_k^{(0)} \cdot \ddot{q}_k + \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{j=i \text{ if } k \leq i \\ j=k \text{ if } k > i}}^n D_{ji}^{(0)T} \cdot m_j \cdot D_{jk}^{(0)} \cdot \ddot{q}_k = \\ & = \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{k=i \text{ if } j \leq i \\ k=j \text{ if } j > i}}^n c_i^{(0)T} \cdot J_k^{(0)} \cdot c_j^{(0)} \cdot \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{k=i \text{ if } j \leq i \\ k=j \text{ if } j > i}}^n D_{ki}^{(0)T} \cdot m_k \cdot D_{kj}^{(0)} \cdot \ddot{q}_j = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot \ddot{q}_j, \end{aligned} \quad (9.2)$$

где

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \sum_{\substack{k=i \text{ if } j \leq i \\ k=j \text{ if } j > i}}^n \left( c_i^{(0)T} \cdot J_k^{(0)} \cdot c_j^{(0)} + D_{ki}^{(0)T} \cdot m_k \cdot D_{kj}^{(0)} \right) = \\ &= \sum_{k=\max(i,j)}^n \left( c_i^{(0)T} \cdot J_k^{(0)} \cdot c_j^{(0)} + D_{ki}^{(0)T} \cdot m_k \cdot D_{kj}^{(0)} \right). \end{aligned} \quad (9.3)$$

С учетом выполненных преобразований и введенных обозначений выражение (9.3) принимает вид

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot \ddot{q}_j + b_i = \mu_{Дi} + \sum_{j=i}^n c_i^{(0)T} \cdot M_{Вj}^{(0)} + \sum_{j=i}^n D_{ji}^{(0)T} \cdot F_{Вj}^{(0)}, \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (9.4)$$

Полученная система уравнений описывает движение исполнительного механизма под действием внешних сил и моментов, а также сил и (или) моментов, развиваемых приводами шарниров.

*Физический смысл* каждого из слагаемых в этом выражении — силы и моменты, действующие вдоль осей шарниров:

$\sum_{j=i}^n a_{ij} \cdot \ddot{q}_j$  — «инерционные» силы или моменты, с которыми исполнительный механизм воздействует на оси шарниров;

$b_i$  — центробежные и кориолисовы силы и моменты, действующие на оси шарниров;

$\sum_{j=i}^n c_i^{(0)T} \cdot M_{Вj}^{(0)}$  — моменты, действующие на оси шарниров, которые

обусловлены внешними моментами, приложенными к звеньям исполнительного механизма;

$\sum_{j=i}^n D_{ji}^{(0)T} \cdot F_{Вj}^{(0)}$  — силы и моменты, действующие на оси шарниров, кото-

рые обусловлены внешними силами, приложенными к звеньям исполнительного механизма;

$\mu_{Дi}$  — силы и моменты, развиваемые приводами исполнительного механизма.

Выражение (9.4) можно представить в виде одного уравнения, если ввести следующие обозначения:

$A = \{a_{ij}\}$  — матрица инерционных коэффициентов, матрица  $(n \times n)$ ;

$b = [b_i]$  — вектор размера  $(n \times 1)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ );

$C^{(0)} = \{c_j^{(0)}\}$  — матрица размера  $(3n \times n)$  (см. п. 5.3);

$D^{(0)} = \{D_{ij}^{(0)}\}$  — матрица размера  $(3n \times n)$  (см. п. 5.7);

$\mu_d = [\mu_{di}]$  — вектор размера  $(n \times 1)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ );

$M_B^{(0)} = [M_{B1}^{(0)T} \quad M_{B2}^{(0)T} \quad \dots \quad M_{Bn}^{(0)T}]^T$  — вектор размера  $(3n \times n)$  с компонента-

ми  $M_{Bj}^{(0)}$ ;

$F_B^{(0)} = [F_{B1}^{(0)T} \quad F_{B2}^{(0)T} \quad \dots \quad F_{Bn}^{(0)T}]^T$  — вектор размера  $(3n \times n)$  с компонента-

ми  $F_{Bj}^{(0)}$ .

Воспользовавшись приведенными обозначениями, получаем

$$A \cdot \ddot{q} + b = \mu_d + C^{(0)T} \cdot M_B^{(0)} + D^{(0)T} \cdot F_B^{(0)}. \quad (9.5)$$

Для того чтобы решить ПЗД исполнительного механизма, нужно составить соотношения, связывающие между собой  $\mu_{di}$ ,  $F_{Bj}$ ,  $M_{Bj}$  и искомые параметры его движения и решить их относительно искомых переменных.

## 9.2. Матрица инерционных коэффициентов

В соответствии с введенными в п. 9.1 обозначениями *матрица инерционных коэффициентов*  $A = \{a_{ij}\}$  — матрица при вторых производных обобщенных координат исполнительного механизма в уравнении его движения.

Из выражения (9.5) следуют изложенные ниже *свойства элементов матрицы A*.

1. Элемент  $a_{ij}$  есть сумма из  $(n - \max(i, j) + 1)$  скалярных произведений векторов  $c_i^{(0)}$  и  $c_j^{(0)}$ , взятых с  $J_k^{(0)}$  как с весовыми матрицами, причем  $k$  приобретает последовательно целочисленные значения из диапазона  $\max(i, j) \leq k \leq n$ , плюс сумма из  $(n - \max(i, j) + 1)$  скалярных произведений векторов  $D_{ki}^{(0)}$  и  $D_{kj}^{(0)}$ , взятых с  $m_k$  как с весовыми множителями, причем  $k$  приобретает последовательно целочисленные значения из диапазона  $\max(i, j) \leq k \leq n$ .

Действительно, по свойству скалярного произведения

$$c_i^{(0)T} \cdot J_k^{(0)} \cdot c_j^{(0)} = c_i^{(0)} \cdot (J_k^{(0)} \cdot c_j^{(0)}),$$

$$D_{ki}^{(0)T} \cdot m_k \cdot D_{kj}^{(0)} = D_{ki}^{(0)} \cdot (m_k \cdot D_{kj}^{(0)}).$$

Количество слагаемых в суммах и диапазоны суммирования легко определяются из выражения (9.3). Данное свойство удобно проиллюстрировать геометрически. На рис. 9.1 представлен случай геометрической интерпретации соотношений для расчета элементов матрицы  $A$  для случая  $i > j$ .

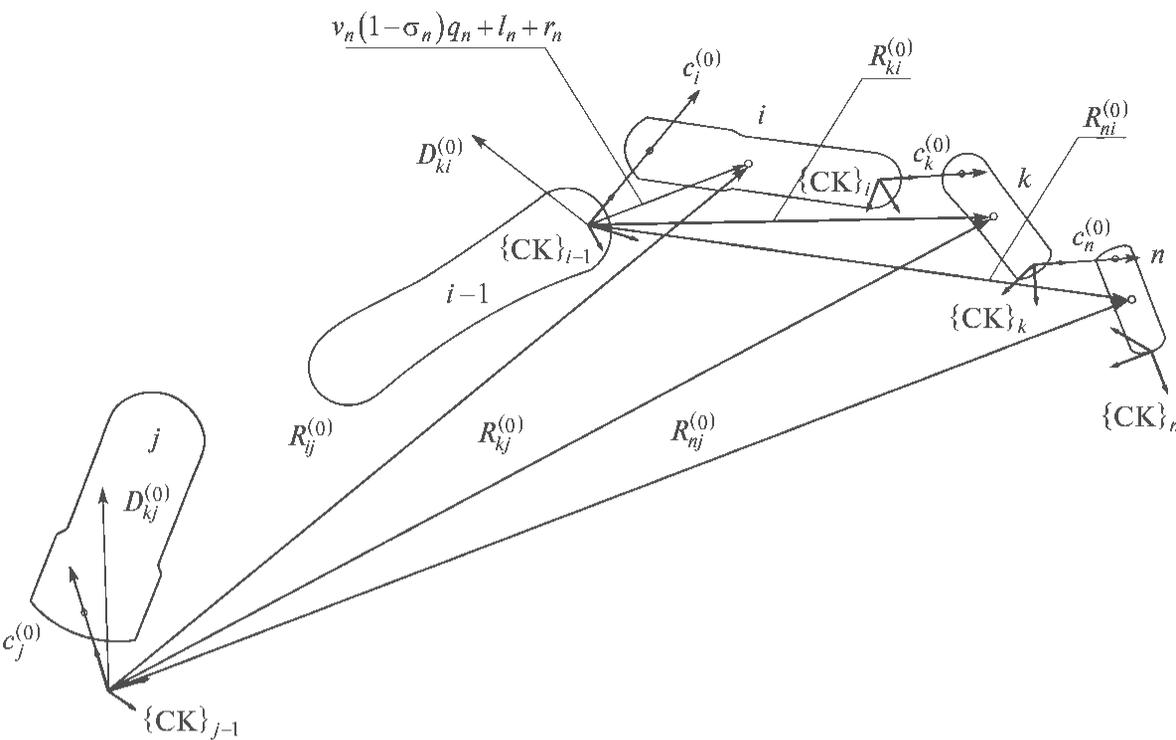


Рис. 9.1. Геометрическая интерпретация соотношений для расчета элементов матрицы  $A$

2. Матрица  $A$  — симметрическая, т. е.  $a_{ij} = a_{ji}$ .

Для доказательства этого свойства достаточно показать, что

$$c_i^{(0)T} \cdot J_k^{(0)} \cdot c_j^{(0)} = c_j^{(0)T} \cdot J_k^{(0)} \cdot c_i^{(0)}$$

и

$$D_{ki}^{(0)T} \cdot m_k \cdot D_{kj}^{(0)} = D_{kj}^{(0)T} \cdot m_k \cdot D_{ki}^{(0)}.$$

Поскольку  $c_i^{(0)T} \cdot J_k^{(0)} \cdot c_j^{(0)}$  — скаляр, то

$$\left( c_i^{(0)T} \cdot J_k^{(0)} \cdot c_j^{(0)} \right)^T = c_i^{(0)T} \cdot J_k^{(0)} \cdot c_j^{(0)}.$$

Выполнение предписанных действий транспонирования над  $\left( c_i^{(0)T} \cdot J_k^{(0)} \cdot c_j^{(0)} \right)^T$  дает

$$c_j^{(0)T} \cdot J_k^{(0)T} \cdot c_i^{(0)} = c_j^{(0)T} \cdot J_k^{(0)} \cdot c_i^{(0)},$$

что и служит доказательством.

Доказательство для  $D_{ki}^{(0)T} \cdot m_k \cdot D_{kj}^{(0)}$  аналогично.

3. Матрица  $A$  — положительно определенная.

Для доказательства записываем выражение для кинетической энергии исполнительного механизма:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (V_j^{(0)T} \cdot m_j \cdot V_j^{(0)} + \omega_j^{(0)T} \cdot J_j^{(0)} \cdot \omega_j^{(0)}) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^j \sum_{l=1}^j (c_k^{(0)T} \cdot J_j^{(0)} \cdot c_l^{(0)} + D_{jk}^{(0)T} \cdot m_j \cdot D_{jl}^{(0)}) \cdot \dot{q}_k \cdot \dot{q}_l. \end{aligned}$$

Изменяем порядок суммирования:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{j=\max(k,1)}^n (c_k^{(0)T} \cdot J_j^{(0)} \cdot c_l^{(0)} + D_{jk}^{(0)T} \cdot m_j \cdot D_{jl}^{(0)}) \cdot \dot{q}_k \cdot \dot{q}_l = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{kl} \cdot \dot{q}_k \cdot \dot{q}_l.$$

Таким образом,  $W$  — квадратичная форма с матрицей  $A$ . По условиям физической реализуемости механической системы матрица квадратичной формы  $W$  является положительно определенной. Поэтому  $A$  — положительно определенная матрица.

Пример расчета матрицы инерционных коэффициентов приведен в приложении 5.

### 9.3. Понятие и физический смысл вектора $b_i$

Подставляем выражения для  $\dot{c}_k^{(0)}$  и  $\sum_{k=1}^j \dot{D}_{jk}^{(0)} \cdot \dot{q}_k$  из пп. 7.1 и 7.2 в выражение (9.1). Теперь элемент  $b_i$  можно представить в виде

$$\begin{aligned} b_i &= \sum_{j=i}^n c_i^{(0)T} \left( J_j^{(0)} \sum_{k=1}^j \lambda(\omega_k^{(0)}) c_k^{(0)} \cdot \dot{q}_k + \lambda(\omega_j^{(0)}) J_j^{(0)} \cdot \omega_j^{(0)} \right) + \\ &+ \sum_{j=i}^n D_{ji}^{(0)T} m_j \left( \lambda(\omega_j^{(0)}) \cdot \lambda(\omega_j^{(0)}) \cdot \tau_{0j} \cdot t_j + \sum_{k=1}^j \lambda(\omega_k^{(0)}) \cdot \lambda(\omega_k^{(0)}) \cdot \tau_{0k} (v_k (1 - \sigma_k) \cdot q_k + l_k) + \right. \\ &+ 2 \sum_{k=1}^j \lambda(\omega_k^{(0)}) \cdot \tau_{0k} (v_k (1 - \sigma_k) \cdot \dot{q}_k) + \lambda \left( \sum_{k=1}^j \lambda(\omega_k^{(0)}) \cdot \tau_{0k} \cdot v_k \cdot \sigma_k \cdot \dot{q}_k \right) \cdot \tau_{0k} \cdot t_j + \\ &\left. + \sum_{l=1}^j \lambda \left( \sum_{k=1}^l \lambda(\omega_k^{(0)}) \cdot \tau_{0k} \cdot v_k \cdot \sigma_k \cdot \dot{q}_k \right) \cdot \tau_{0l} (v_l (1 - \sigma_l) \cdot q_l + l_l) \right). \end{aligned}$$

Физический смысл  $b_i$ : сила или момент, воздействующие на оси шарниров при движении исполнительного механизма. Из представленного выражения видно, что  $b_i$  квадратично зависит от вторых производных обобщенных координат. Слагаемые, входящие в  $b_i$ , представляют собой центробежные силы, моменты от действия этих сил, а также кориолисовы силы и моменты от их действия.

## 9.4. Запись уравнений движения исполнительного механизма с использованием матриц преобразования между системами координат звеньев

Выражения движения получены с использованием компонент, определенных в  $\{СК\}_0$  ( $J_k^{(0)}, c_j^{(0)}, D_{kj}^{(0)}$ ). На практике чаще бывает удобно записать уравнения движения исполнительного механизма с использованием компонент, заданных в СК звеньев ( $J_k^{(k)}, c_j^{(k)}, D_{kj}^{(k)}$ ). Для этого выражаем  $J_k^{(0)}, c_j^{(0)}, D_{kj}^{(0)}$  через  $J_k^{(k)}, c_j^{(k)}$  и  $D_{kj}^{(k)}$ , используя для этого матрицы  $\tau_{0k}$ :

$$J_k^{(k)} = \tau_{k0} \cdot J_k^{(0)} \cdot \tau_{0k}$$

$$c_j^{(0)} = \tau_{0k} \cdot c_j^{(k)},$$

$$D_{kj}^{(0)} = \tau_{0k} \cdot D_{kj}^{(k)}.$$

Здесь и далее  $J_k^{(k)}$  — тензор инерции звена  $k$ , заданный в  $\{СК\}_k$ , совмещенной с центром масс этого же звена.

Уравнения движения исполнительного механизма, записанные с использованием компонент, заданных в СК звеньев, принимают вид

$$\sum_{j=i}^n a_{ij} \cdot \dot{q}_j + b_i = \mu_{\Pi i}^{(i)} + \sum_{j=i}^n c_i^{(j)T} \cdot M_{Bj}^{(j)} + \sum_{j=i}^n D_{ji}^T \cdot F_{Bj}^{(j)},$$

где элементы  $a_{ij}$  и  $b_{ij}$  можно выразить как

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \sum_{k=\max(i,j)}^n \left( c_i^{(k)T} \cdot \tau_{k0} \cdot J_k^{(0)} \cdot \tau_{0k} \cdot c_j^{(k)} + D_{ki}^T \cdot \tau_{k0} \cdot m_k \cdot \tau_{0k} \cdot D_{kj} \right) = \\ &= \sum_{k=\max(i,j)}^n \left( c_i^{(k)T} \cdot J_k^{(k)} \cdot c_j^{(k)} + D_{ki}^{(k)T} \cdot m_k \cdot D_{kj}^{(k)} \right) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} b_{ij} &= \sum_{j=i}^n c_i^{(j)T} \left( J_j^{(j)} \cdot \sum_{k=1}^j \lambda(\omega_k) \cdot c_k^{(k)} \cdot \dot{q}_k + \lambda(\omega_j) \cdot J_k^{(k)} \cdot \omega_j \right) + \sum_{j=i}^n D_{ji}^{(j)T} \cdot m_j \cdot \lambda(\omega_j) \cdot \lambda(\omega_j) \cdot t_{j(j)}^{(j)} + \\ &+ \sum_{j=i}^n D_{ji}^{(j)T} \cdot m_j \cdot \tau_{jk} \left( \sum_{k=1}^j \lambda(\omega_k) \cdot \lambda(\omega_k) \cdot (v_k(1-\sigma_k) \cdot \dot{q}_k + l_k) + 2 \sum_{j=i}^n \lambda(\omega_k) (v_k(1-\sigma_k) \cdot \dot{q}_k) + \right. \\ &\left. + \lambda \left( \sum_{k=1}^j \lambda(\omega_k) \cdot v_k \cdot \sigma_k \cdot \dot{q}_k \right) \cdot t_{j(j)}^{(j)} + \sum_{l=1}^j \lambda \left( \sum_{k=1}^l \lambda(\omega_k) \cdot v_k \cdot \sigma_k \cdot \dot{q}_k \right) \cdot \tau_{kl} (v_l(1-\sigma_l) \cdot q_l + l_l) \right). \end{aligned}$$

Таким образом, получены выражения для уравнений движения, записанные с использованием компонент, определенных в СК звеньев.

### **Контрольные вопросы и задания**

1. Запишите уравнения движения исполнительного механизма МР.
2. В чем заключается физический смысл компонент, входящих в уравнения, описывающие движение исполнительного механизма МР?
3. Какими свойствами обладают матрицы инерционных коэффициентов уравнений движения исполнительного механизма МР?

## Литература

- Булгаков А.Г., Воробьев В.А.* Промышленные роботы. Кинематика, динамика, контроль и управление. М.: Солон-Пресс, 2007. 488 с.
- Егоров О.Д., Подураев Ю.В., Бубнов М.А.* Робототехнические мехатронные системы. М.: Станкин, 2015. 328 с.
- Лесков А.Г.* Теоретические основы моделирования и анализа динамики манипуляционных роботов, их приложение к задачам проектирования и подготовки операторов: дис. ... д-ра техн. наук. М., 2002.
- Лесков А.Г., Ющенко А.С.* Моделирование и анализ робототехнических систем. М.: Машиностроение, 1992. 78 с.
- Лукинов А.П.* Проектирование мехатронных и робототехнических устройств. СПб.: Лань, 2012. 607 с.
- Накано Э.* Введение в робототехнику: пер. с яп. / под ред. А.М. Филатова. М.: Мир, 1988. 334 с.
- Фу К., Гонсалес Р., Ли К.* Робототехника: пер. с англ. / под ред. В.Г. Градецкого. М.: Мир, 1989. 624 с.
- Юревич Е.И.* Основы робототехники. СПб.: БХВ-Петербург, 2010. 368 с.
- Ding X., Kong X., Dai J.S., eds.* Advances in Reconfigurable Mechanisms and Robots II. Springer Int. Publ., 2016. Vol. 36. 1117 p. (Mechanisms and Machine Science).
- Donelan P.S.* Kinematic Singularities of Robot Manipulators. InTech, 2010. 30 p.
- Thomas F., Gracia A.P.* Computational Kinematics. Springer Int. Publ., 2014. Vol. 15. 409 p. (Mechanisms and Machine Science).
- Zegloul S., Laribi M.A., Gazeau J.* Robotics and Mechatronics. Springer Int. Publ., 2016. Vol. 37. 322 p. (Mechanisms and Machine Science).

## Пример решения прямой позиционной кинематической задачи

Рассмотрим решение прямой кинематической задачи для промышленного робота Kawasaki FS20N. Исполнительный механизм Kawasaki FS20N состоит из шести звеньев, сочлененных шестью шарнирами вращательного типа. На рис. П.1 приведена расчетная кинематическая схема робота.

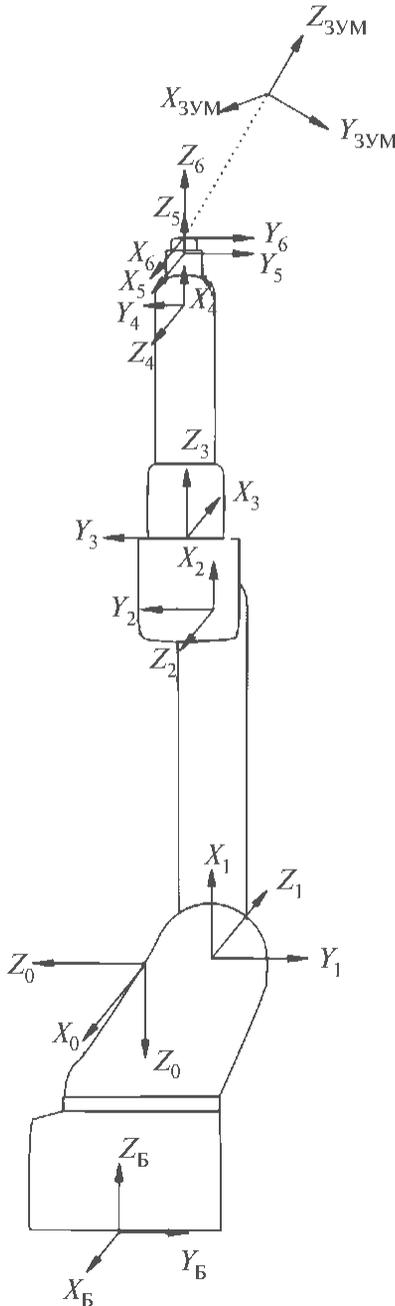


Рис. П.1. Кинематическая схема исполнительного механизма Kawasaki FS20N

В положении, приведенном на рис. П.1, все значения координат шарниров полагаются нулевыми.

Помимо СК звеньев в рассмотрение вводится базовая СК  $\{СК\}_B$  и система координат ЗУМ  $\{СК\}_{ЗУМ}$ . Базовая СК служит основой для задания всех других СК.

В соответствии с чертежом и введенными СК получаем

$$\begin{aligned}
 l_0^{(0)} &= (0 \quad L_0 \quad 0)^T, & \alpha_0 &= 180^\circ, & \beta_0 &= 0, & \gamma_0 &= 0, \\
 l_1^{(1)} &= (0 \quad L_1 \quad 0)^T, & \alpha_1 &= 180^\circ, & \beta_1 &= -90^\circ, & \gamma_1 &= 0, \\
 l_2^{(2)} &= (L_2 \quad 0 \quad 0)^T, & \alpha_2 &= 180^\circ, & \beta_2 &= 0, & \gamma_2 &= 0, \\
 l_3^{(3)} &= (0 \quad L_3 \quad 0)^T, & \alpha_3 &= 0, & \beta_3 &= 90^\circ, & \gamma_3 &= 0, \\
 l_4^{(4)} &= (L_4 \quad 0 \quad 0)^T, & \alpha_4 &= 0, & \beta_4 &= -90^\circ, & \gamma_4 &= 0, \\
 l_5^{(5)} &= (0 \quad 0 \quad L_5)^T, & \alpha_5 &= 180^\circ, & \beta_5 &= 90^\circ, & \gamma_5 &= 0, \\
 l_6^{(6)} &= (0 \quad 0 \quad L_6)^T, & \alpha_6 &= 0, & \beta_6 &= 0, & \gamma_6 &= 0, \\
 l_{ЗУМ}^{(ЗУМ)} &= (0 \quad 0 \quad L_{ЗУМ})^T, & \alpha_{ЗУМ} &= -30^\circ, & \beta_{ЗУМ} &= 0, & \gamma_{ЗУМ} &= 0.
 \end{aligned}$$

Запишем выражения для расчета матриц перехода между СК звеньев:

$$\varepsilon_0 = \tau_{0B}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\varepsilon_1 = \tau_{10}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_2 = \tau_{21}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_3 = \tau_{32}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\varepsilon_4 = \tau_{43}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_5 = \tau_{54}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_6 = \tau_{65}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Далее запишем матрицы поворота смежных звеньев:

$$\tau_{B0} = \varepsilon_0^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}\tau_{01} &= \begin{pmatrix} \cos q_1 & -\sin q_1 & 0 \\ \sin q_1 & \cos q_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \varepsilon_1^T = \begin{pmatrix} \cos q_1 & -\sin q_1 & 0 \\ \sin q_1 & \cos q_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \sin q_1 & -\cos q_1 \\ 0 & -\cos q_1 & -\sin q_1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_{12} &= \begin{pmatrix} \cos q_2 & -\sin q_2 & 0 \\ \sin q_2 & \cos q_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \varepsilon_2^T = \begin{pmatrix} \cos q_2 & -\sin q_2 & 0 \\ \sin q_2 & \cos q_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos q_2 & \sin q_2 & 0 \\ \sin q_2 & -\cos q_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_{23} &= \begin{pmatrix} \cos q_3 & -\sin q_3 & 0 \\ \sin q_3 & \cos q_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \varepsilon_3^T = \begin{pmatrix} \cos q_3 & -\sin q_3 & 0 \\ \sin q_3 & \cos q_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\sin q_3 & \cos q_3 \\ 0 & \cos q_3 & \sin q_3 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_{34} &= \begin{pmatrix} \cos q_4 & -\sin q_4 & 0 \\ \sin q_4 & \cos q_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \varepsilon_4^T = \begin{pmatrix} \cos q_4 & -\sin q_4 & 0 \\ \sin q_4 & \cos q_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\sin q_4 & -\cos q_4 \\ 0 & \cos q_4 & -\sin q_4 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_{45} &= \begin{pmatrix} \cos q_5 & -\sin q_5 & 0 \\ \sin q_5 & \cos q_5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \varepsilon_5^T = \begin{pmatrix} \cos q_5 & -\sin q_5 & 0 \\ \sin q_5 & \cos q_5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \sin q_5 & \cos q_5 \\ 0 & -\cos q_5 & \sin q_5 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_{56} &= \begin{pmatrix} \cos q_6 & -\sin q_6 & 0 \\ \sin q_6 & \cos q_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \varepsilon_6^T = \begin{pmatrix} \cos q_6 & -\sin q_6 & 0 \\ \sin q_6 & \cos q_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos q_6 & -\sin q_6 & 0 \\ \sin q_6 & \cos q_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Вычисляем матрицы поворота в  $\{CK\}_B$ :

$$\tau_{B1} = \tau_{B0}\tau_{01} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sin q_1 & -\cos q_1 \\ 0 & -\cos q_1 & -\sin q_1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sin q_1 & -\cos q_1 \\ 0 & \cos q_1 & \sin q_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}\tau_{B2} = \tau_{B1}\tau_{12} &= \begin{pmatrix} 0 & \sin q_1 & -\cos q_1 \\ 0 & \cos q_1 & \sin q_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos q_2 & \sin q_2 & 0 \\ \sin q_2 & -\cos q_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \sin q_1 \sin q_2 & -\sin q_1 \cos q_2 & \cos q_1 \\ \cos q_1 \sin q_2 & -\cos q_1 \cos q_2 & -\sin q_1 \\ \cos q_2 & \sin q_2 & 0 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_{B3} = \tau_{B2}\tau_{23} &= \begin{pmatrix} \sin q_1 \sin q_2 & -\sin q_1 \cos q_2 & \cos q_1 \\ \cos q_1 \sin q_2 & -\cos q_1 \cos q_2 & -\sin q_1 \\ \cos q_2 & \sin q_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\sin q_3 & \cos q_3 \\ 0 & \cos q_3 & \sin q_3 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -\cos q_1 & -\sin q_1 \cos q_2 \cos q_3 - \sin q_1 \sin q_2 \cos q_3 - & \sin q_1 \sin q_2 \cos q_3 - \\ & -\sin q_1 \sin q_2 \sin q_3 & -\sin q_1 \cos q_2 \sin q_3 \\ \sin q_1 & -\cos q_1 \cos q_2 \cos q_3 - \cos q_1 \sin q_2 \cos q_3 - & \cos q_1 \sin q_2 \cos q_3 - \\ & -\cos q_1 \sin q_2 \sin q_3 & -\cos q_1 \cos q_2 \sin q_3 \\ 0 & \sin q_2 \cos q_3 - \cos q_2 \sin q_3 & \cos q_2 \cos q_3 + \sin q_2 \sin q_3 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Аналогично  $\tau_{B4} = \tau_{B3}\tau_{34}$  и  $\tau_{B5} = \tau_{B4}\tau_{45}$ . Тогда получаем

$$\tau_{B6} = \tau_{B5}\tau_{56} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

где

$$a_{11} = \cos q_6 \left( \sin q_4 \left( \sin q_1 \cos q_2 \cos q_3 + \sin q_1 \sin q_2 \sin q_3 \right) + \cos q_1 \cos q_4 \right) - \\ - \sin q_6 \left( \sin q_5 \left( \sin q_1 \cos q_2 \sin q_3 - \sin q_1 \sin q_2 \cos q_3 \right) - \right. \\ \left. - \cos q_5 \left( \cos q_4 \left( \sin q_1 \cos q_2 \cos q_3 + \sin q_1 \sin q_2 \sin q_3 \right) - \cos q_1 \sin q_4 \right) \right),$$

$$a_{12} = -\cos q_6 \left( \sin q_5 \left( \sin q_1 \cos q_2 \sin q_3 - \sin q_1 \sin q_2 \cos q_3 \right) - \right. \\ \left. - \cos q_5 \left( \cos q_4 \left( \sin q_1 \cos q_2 \cos q_3 - \sin q_1 \sin q_2 \sin q_3 \right) - \cos q_1 \sin q_4 \right) \right) - \\ - \sin q_6 \left( \sin q_4 \left( \sin q_1 \cos q_2 \cos q_3 + \sin q_1 \sin q_2 \sin q_3 \right) + \cos q_1 \cos q_4 \right),$$

$$a_{13} = -\cos q_5 \left( \sin q_1 \cos q_2 \sin q_3 - \sin q_1 \sin q_2 \cos q_3 \right) - \\ - \sin q_5 \left( \cos q_4 \left( \sin q_1 \cos q_2 \cos q_3 + \sin q_1 \sin q_2 \sin q_3 \right) - \cos q_1 \sin q_4 \right),$$

$$a_{21} = \cos q_6 \left( \sin q_4 \left( \cos q_1 \cos q_2 \cos q_3 + \cos q_1 \sin q_2 \sin q_3 \right) - \sin q_1 \cos q_4 \right) - \\ - \sin q_6 \left( \sin q_5 \left( \cos q_1 \cos q_2 \sin q_3 - \cos q_1 \sin q_2 \cos q_3 \right) - \right. \\ \left. - \cos q_5 \left( \cos q_4 \left( \cos q_1 \cos q_2 \cos q_3 + \cos q_1 \sin q_2 \sin q_3 \right) + \sin q_1 \sin q_4 \right) \right),$$

$$a_{22} = -\cos q_6 \left( \sin q_5 \left( \cos q_1 \cos q_2 \sin q_3 - \cos q_1 \sin q_2 \cos q_3 \right) - \right. \\ \left. - \cos q_5 \left( \cos q_4 \left( \cos q_1 \cos q_2 \cos q_3 + \cos q_1 \sin q_2 \sin q_3 \right) + \sin q_1 \sin q_4 \right) \right) - \\ - \sin q_6 \left( \sin q_4 \left( \cos q_1 \cos q_2 \cos q_3 + \cos q_1 \sin q_2 \sin q_3 \right) - \sin q_1 \cos q_4 \right),$$

$$a_{23} = -\cos q_5 \left( \cos q_1 \cos q_2 \sin q_3 - \cos q_1 \sin q_2 \cos q_3 \right) - \\ - \sin q_5 \left( \cos q_4 \left( \cos q_1 \cos q_2 \cos q_3 + \sin q_1 \sin q_2 \sin q_3 \right) + \sin q_1 \sin q_4 \right),$$

$$a_{31} = \sin q_6 \left( \sin q_5 \left( \cos q_2 \cos q_3 + \sin q_2 \sin q_3 \right) + \right. \\ \left. + \cos q_5 \cos q_4 \left( \cos q_2 \sin q_3 - \sin q_2 \cos q_3 \right) \right) + \\ + \cos q_6 \sin q_4 \left( \cos q_2 \sin q_3 - \sin q_2 \cos q_3 \right),$$

$$a_{32} = \cos q_6 \left( \sin q_5 \left( \cos q_2 \cos q_3 + \sin q_2 \sin q_3 \right) + \right. \\ \left. + \cos q_5 \cos q_4 \left( \cos q_2 \sin q_3 - \sin q_2 \cos q_3 \right) \right) - \\ - \sin q_6 \sin q_4 \left( \cos q_2 \sin q_3 - \sin q_2 \cos q_3 \right),$$

$$a_{33} = \cos q_5 (\cos q_2 \cos q_3 + \sin q_2 \sin q_3) - \cos q_4 \sin q_5 (\cos q_2 \sin q_3 - \sin q_2 \cos q_3).$$

В общем случае

$$\tau_{БЗУМ} = \tau_{Б6} \tau_{6ЗУМ},$$

где

$$\tau_{6ЗУМ} = \varepsilon_{3УМ}^T,$$

$$\varepsilon_{3УМ}^T = \begin{pmatrix} \cos \beta_{3УМ} \cos \gamma_{3УМ} & -\cos \beta_{3УМ} \sin \gamma_{3УМ} & \sin \beta_{3УМ} \\ \cos \alpha_{3УМ} \sin \gamma_{3УМ} + \\ + \sin \alpha_{3УМ} \sin \beta_{3УМ} \cos \gamma_{3УМ} & \cos \alpha_{3УМ} \cos \gamma_{3УМ} - \\ - \sin \alpha_{3УМ} \sin \beta_{3УМ} \sin \gamma_{3УМ} & -\sin \alpha_{3УМ} \sin \beta_{3УМ} \sin \gamma_{3УМ} & -\sin \alpha_{3УМ} \cos \beta_{3УМ} \\ \sin \alpha_{3УМ} \sin \gamma_{3УМ} - & \sin \alpha_{3УМ} \cos \gamma_{3УМ} + & \cos \alpha_{3УМ} \cos \beta_{3УМ} \\ -\cos \alpha_{3УМ} \sin \beta_{3УМ} \cos \gamma_{3УМ} & + \cos \alpha_{3УМ} \sin \beta_{3УМ} \sin \gamma_{3УМ} & \end{pmatrix}$$

При  $\alpha_{3УМ} = -30^\circ$ ,  $\beta_{3УМ} = 0$ ,  $\gamma_{3УМ} = 0$ :

$$\tau_{6ЗУМ} = \varepsilon_{3УМ}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,866 & 0,5 \\ 0 & -0,5 & 0,866 \end{pmatrix}$$

и матрица  $\tau_{БЗУМ}$  принимает вид

$$\tau_{БЗУМ} = \tau_{Б6} \tau_{6ЗУМ} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,866 & 0,5 \\ 0 & -0,5 & 0,866 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix},$$

где

$$b_{11} = \cos q_6 (\sin q_4 (\sin q_1 \cos q_2 \cos q_3 + \sin q_1 \sin q_2 \sin q_3) + \cos q_1 \cos q_4) - \\ - \sin q_6 (\sin q_5 (\sin q_1 \cos q_2 \sin q_3 - \sin q_1 \sin q_2 \cos q_3) - \\ - \cos q_5 (\cos q_4 (\sin q_1 \cos q_2 \cos q_3 + \sin q_1 \sin q_2 \sin q_3) - \cos q_1 \sin q_4)),$$

$$b_{12} = -0,866 (\cos q_6 (\sin q_5 (\sin q_1 \cos q_2 \sin q_3 - \sin q_1 \sin q_2 \cos q_3) - \\ - \cos q_5 (\cos q_4 (\sin q_1 \cos q_2 \cos q_3 - \sin q_1 \sin q_2 \sin q_3) - \cos q_1 \sin q_4)) - \\ - \sin q_6 (\sin q_4 (\sin q_1 \cos q_2 \cos q_3 + \sin q_1 \sin q_2 \sin q_3) + \cos q_1 \cos q_4)) +$$

$$+0,5\left(\cos q_5\left(\sin q_1 \cos q_2 \sin q_3 - \sin q_1 \sin q_2 \cos q_3\right) - \sin q_5\left(\cos q_4\left(\sin q_1 \cos q_2 \cos q_3 + \sin q_1 \sin q_2 \sin q_3\right) - \cos q_1 \sin q_4\right)\right),$$

$$b_{13} = -0,5\left(\cos q_6\left(\sin q_5\left(\sin q_1 \cos q_2 \sin q_3 - \sin q_1 \sin q_2 \cos q_3\right) - \cos q_5\left(\cos q_4\left(\sin q_1 \cos q_2 \cos q_3 - \sin q_1 \sin q_2 \sin q_3\right) - \cos q_1 \sin q_4\right)\right) - \sin q_6\left(\sin q_4\left(\sin q_1 \cos q_2 \cos q_3 + \sin q_1 \sin q_2 \sin q_3\right) + \cos q_1 \cos q_4\right)\right) - 0,866\left(\cos q_5\left(\sin q_1 \cos q_2 \sin q_3 - \sin q_1 \sin q_2 \cos q_3\right) - \sin q_5\left(\cos q_4\left(\sin q_1 \cos q_2 \cos q_3 + \sin q_1 \sin q_2 \sin q_3\right) - \cos q_1 \sin q_4\right)\right),$$

$$b_{21} = \cos q_6\left(\sin q_4\left(\cos q_1 \cos q_2 \cos q_3 + \cos q_1 \sin q_2 \sin q_3\right) - \sin q_1 \cos q_4\right) - \sin q_6\left(\sin q_5\left(\cos q_1 \cos q_2 \sin q_3 - \cos q_1 \sin q_2 \cos q_3\right) - \cos q_5\left(\cos q_4\left(\cos q_1 \cos q_2 \cos q_3 + \cos q_1 \sin q_2 \sin q_3\right) + \sin q_1 \sin q_4\right)\right),$$

$$b_{22} = -0,866\left(\cos q_6\left(\sin q_5\left(\cos q_1 \cos q_2 \sin q_3 - \cos q_1 \sin q_2 \cos q_3\right) - \cos q_5\left(\cos q_4\left(\cos q_1 \cos q_2 \cos q_3 + \cos q_1 \sin q_2 \sin q_3\right) + \sin q_1 \sin q_4\right)\right) - \sin q_6\left(\sin q_4\left(\cos q_1 \cos q_2 \cos q_3 + \cos q_1 \sin q_2 \sin q_3\right) - \sin q_1 \cos q_4\right)\right) + 0,5\left(\cos q_5\left(\cos q_1 \cos q_2 \sin q_3 - \cos q_1 \sin q_2 \cos q_3\right) - \sin q_5\left(\cos q_4\left(\cos q_1 \cos q_2 \cos q_3 + \sin \cos q_1 \sin q_2 \sin q_3\right) + \sin q_1 \sin q_4\right)\right),$$

$$b_{23} = -0,5\left(\cos q_6\left(\sin q_5\left(\cos q_1 \cos q_2 \sin q_3 - \cos q_1 \sin q_2 \cos q_3\right) - \cos q_5\left(\cos q_4\left(\cos q_1 \cos q_2 \cos q_3 + \cos q_1 \sin q_2 \sin q_3\right) + \sin q_1 \sin q_4\right)\right) - \sin q_6\left(\sin q_4\left(\cos q_1 \cos q_2 \cos q_3 + \cos q_1 \sin q_2 \sin q_3\right) - \sin q_1 \cos q_4\right)\right) - 0,866\left(\cos q_5\left(\cos q_1 \cos q_2 \sin q_3 - \cos q_1 \sin q_2 \cos q_3\right) - \sin q_5\left(\cos q_4\left(\cos q_1 \cos q_2 \cos q_3 + \sin \cos q_1 \sin q_2 \sin q_3\right) + \sin q_1 \sin q_4\right)\right),$$

$$b_{32} = 0,866\left(\cos q_6\left(\sin q_5\left(\cos q_2 \cos q_3 + \sin q_2 \sin q_3\right) + \cos q_5 \cos q_4\left(\cos q_2 \sin q_3 - \sin q_2 \cos q_3\right)\right) - \sin q_6 \sin q_4\left(\cos q_2 \sin q_3 - \sin q_2 \cos q_3\right)\right) - 0,5\left(\cos q_5\left(\cos q_2 \cos q_3 + \sin q_2 \sin q_3\right) - \cos q_4 \sin q_5\left(\cos q_2 \sin q_3 - \sin q_2 \cos q_3\right)\right),$$

$$\begin{aligned}
b_{33} = & 0,5 \left( \cos q_6 \left( \sin q_5 \left( \cos q_2 \cos q_3 + \sin q_2 \sin q_3 \right) + \right. \right. \\
& + \cos q_5 \cos q_4 \left( \cos q_2 \sin q_3 - \sin q_2 \cos q_3 \right) - \\
& - \sin q_6 \sin q_4 \left( \cos q_2 \sin q_3 - \sin q_2 \cos q_3 \right) \left. \right) + \\
& + 0,866 \left( \cos q_5 \left( \cos q_2 \cos q_3 + \sin q_2 \sin q_3 \right) - \right. \\
& \left. - \cos q_4 \sin q_5 \left( \cos q_2 \sin q_3 - \sin q_2 \cos q_3 \right) \right).
\end{aligned}$$

Запишем выражения для расчета координат векторов, связывающих начало базовой СК и начала СК звеньев.

В общем случае справедливы следующие утверждения:

$$t_{0(B)}^{(B)} = \tau_{B0} t_{0(0)}^{(0)} + \tau_{B0} l_0^{(0)},$$

$$t_{1(B)}^{(B)} = \tau_{B1} t_{1(1)}^{(1)} + \tau_{B1} l_1^{(1)} + \tau_{B0} l_0^{(0)},$$

$$t_{2(B)}^{(B)} = \tau_{B2} t_{2(2)}^{(2)} + \tau_{B0} l_0^{(0)} + \tau_{B1} l_1^{(1)} + \tau_{B2} l_2^{(2)},$$

$$t_{3(B)}^{(B)} = \tau_{B3} t_{3(3)}^{(3)} + \tau_{B0} l_0^{(0)} + \tau_{B1} l_1^{(1)} + \tau_{B2} l_2^{(2)} + \tau_{B3} l_3^{(3)},$$

$$t_{4(B)}^{(B)} = \tau_{B4} t_{4(4)}^{(4)} + \tau_{B0} l_0^{(0)} + \tau_{B1} l_1^{(1)} + \tau_{B2} l_2^{(2)} + \tau_{B3} l_3^{(3)} + \tau_{B4} l_4^{(4)},$$

$$t_{5(B)}^{(B)} = \tau_{B5} t_{5(5)}^{(5)} + \tau_{B0} l_0^{(0)} + \tau_{B1} l_1^{(1)} + \tau_{B2} l_2^{(2)} + \tau_{B3} l_3^{(3)} + \tau_{B4} l_4^{(4)} + \tau_{B5} l_5^{(5)},$$

$$t_{6(B)}^{(B)} = \tau_{B6} t_{6(6)}^{(6)} + \tau_{B0} l_0^{(0)} + \tau_{B1} l_1^{(1)} + \tau_{B2} l_2^{(2)} + \tau_{B3} l_3^{(3)} + \tau_{B4} l_4^{(4)} + \tau_{B5} l_5^{(5)} + \tau_{B6} l_6^{(6)}.$$

Координаты ЗУМ в базовой СК можно вычислить по аналогичной формуле

$$\begin{aligned}
t_{ЗУМ(B)}^{(B)} = & \tau_{BЗУМ} t_{ЗУМ(ЗУМ)}^{(ЗУМ)} + \tau_{B0} l_0^{(0)} + \tau_{B1} l_1^{(1)} + \tau_{B2} l_2^{(2)} + \tau_{B3} l_3^{(3)} + \\
& + \tau_{B4} l_4^{(4)} + \tau_{B5} l_5^{(5)} + \tau_{B6} l_6^{(6)} + \tau_{BЗУМ} l_{ЗУМ}^{(ЗУМ)}.
\end{aligned}$$

Вычисляем значения углов Эйлера, заданных в последовательности поворотов  $\{СК\}_{ЗУМ}$  вокруг осей  $X, Y, Z$  базовой СК.

В некотором положении исполнительного механизма матрица  $\tau_{BЗУМ}$  имеет вид

$$\tau_{BЗУМ} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}.$$

В соответствии с приведенными ранее формулами имеем

$$P = \operatorname{arctg}\left(\frac{-b_{23}}{b_{33}}\right), \quad Y = \operatorname{arctg}\left(\frac{b_{13}}{-b_{23} \sin P + b_{33} \cos P}\right),$$

$$R = \operatorname{arctg}\left(\frac{b_{21} \cos P + b_{31} \sin P}{b_{22} \cos P + b_{32} \sin P}\right).$$

Представленные соотношения позволяют получить решение ПКЗ для промышленного робота Kawasaki FS20N с рассматриваемой кинематической схемой.

## Пример решения обратной позиционной кинематической задачи

Рассмотрим решение обратной кинематической задачи для промышленного робота Kawasaki FS20N.

С учетом ненулевых значений углов шарниров исполнительный механизм МР Kawasaki FS20N занимает в пространстве положение, представленное на рис. П.2.

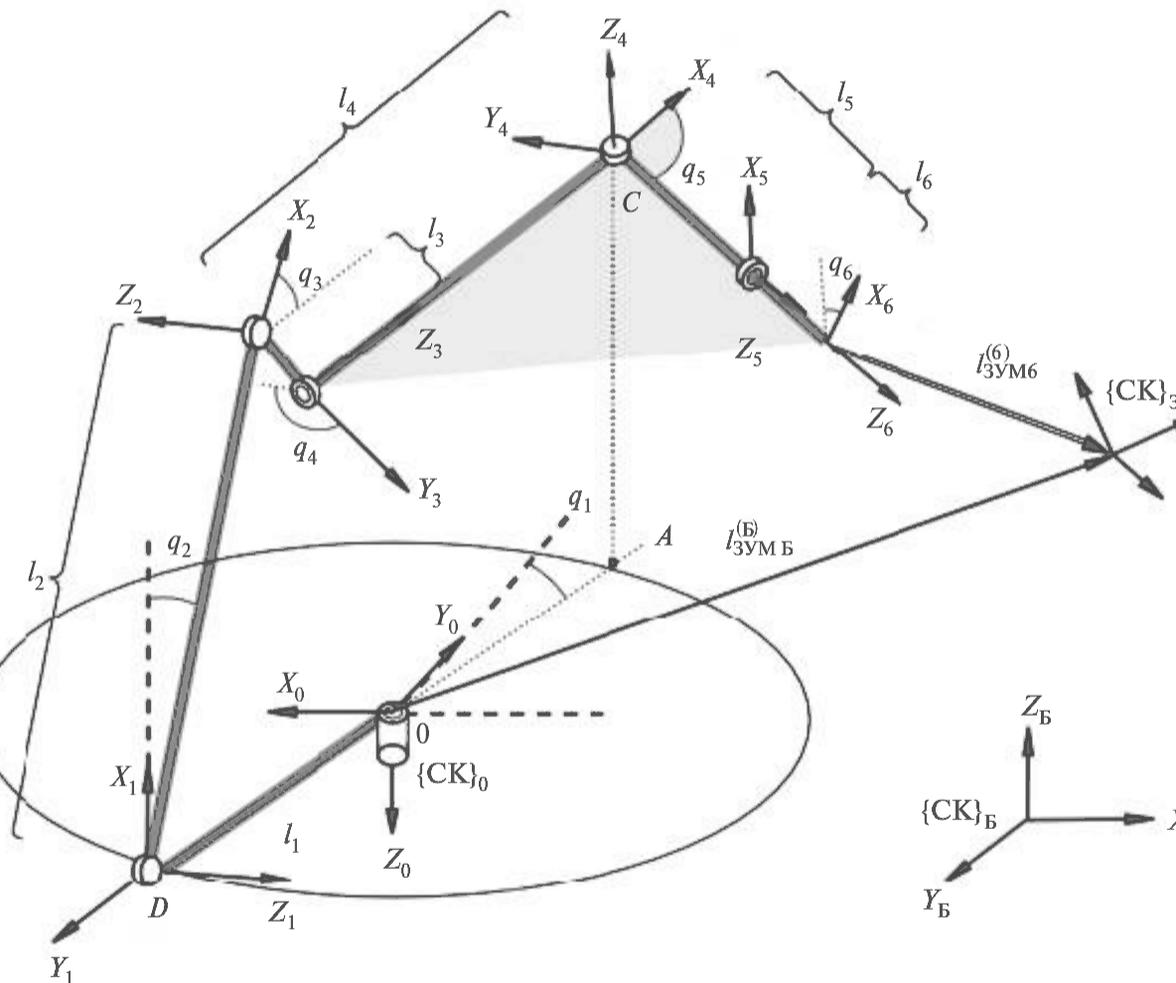


Рис. П.2. Схема пространственного положения исполнительного механизма Kawasaki FS20N:

$l_{3УМБ}^{(Б)}$  — вектор, соединяющий начало базовой  $\{СК\}_Б$  и  $\{СК\}_{3УМ}$ , задан в осях  $\{СК\}_Б$ ;  $l_{3УМ6}^{(6)}$  — вектор, соединяющий начало  $\{СК\}_6$  с началом  $\{СК\}_{3УМ}$ , задан в осях  $\{СК\}$

Вычислить:

- матрицу преобразования вектора  $\tau_{\text{ЗУМБ}}$ , заданного в  $\{\text{СК}\}_\text{Б}$ , в  $\{\text{СК}\}_{\text{ЗУМ}}$ , ее рассчитывают как произведение трех матриц элементарных поворотов  $\{\text{СК}\}_{\text{ЗУМ}}$  относительно базовой  $\{\text{СК}\}_\text{Б}$  (оси  $X, Y, Z$  последовательно);
- матрицу преобразования вектора  $\tau_{6\text{ЗУМ}}$ , заданного в  $\{\text{СК}\}_6$ , в  $\{\text{СК}\}_{\text{ЗУМ}}$ , ее рассчитывают как произведение трех матриц элементарных поворотов  $\{\text{СК}\}_{\text{ЗУМ}}$  относительно  $\{\text{СК}\}_6$  (оси  $X, Y, X$  последовательно).

Выделены звенья 1 — 6. Начала  $\{\text{СК}\}_0$  и  $\{\text{СК}\}_\text{Б}$  совмещены.

Матрицу перехода от  $\{\text{СК}\}_6$  к  $\{\text{СК}\}_\text{Б}$  и матрицу перехода от  $\{\text{СК}\}_{\text{ЗУМ}}$  к  $\{\text{СК}\}_0$  следует рассчитать таким образом:

$$\tau_{\text{Б6}} = \tau_{\text{ЗУМБ}}^T \cdot \tau_{\text{ЗУМ6}},$$

$$\tau_{06} = \tau_{0\text{Б}} \cdot \tau_{\text{Б6}}.$$

Вектор  $l_{\text{ЗУМ0}}^{(0)}$  определяется по равенству

$$l_{\text{ЗУМ0}}^{(0)} = \tau_{0\text{Б}} \cdot l_{\text{ЗУМБ}}^{(\text{Б})}.$$

Зная  $l_{\text{ЗУМ6}}^{(6)}$  (вектор, связывающий  $\{\text{СК}\}_6$  и  $\{\text{СК}\}_{\text{ЗУМ}}$ ) и  $\tau_{\text{ЗУМ6}}$ , вычисляют вектор

$$l_{60}^{(0)} = l_{\text{ЗУМ0}}^{(0)} - \tau_{\text{ЗУМ6}} \cdot l_{\text{ЗУМ6}}^{(6)}.$$

Учитывая, что векторы  $l_5^{(5)}$  и  $l_6^{(6)}$  направлены строго вдоль оси  $Z\{\text{СК}\}_6$ , вычисляют вектор

$$l_{40}^{(0)} = l_{60}^{(0)} - (|l_5^{(5)}| + |l_6^{(6)}|) \cdot Z_6^{(0)},$$

где  $Z_6^{(0)}$  — 3-й столбец матрицы  $\tau_{06}$ .

Вектор длины первого звена  $l_1^{(1)}$  направлен строго вдоль оси  $Y\{\text{СК}\}_1$ :

$$l_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ |l_1| \\ 0 \end{pmatrix}.$$

На рис. П.2 точки  $O$  и  $D$  связывает вектор  $l_1^{(0)}$  в проекциях на  $\{\text{СК}\}_0$ , т. е.

$$l_1^{(0)} = \overline{OD}^{(0)}.$$

Возможны два направления этого вектора, в зависимости от значения индекса кинематической конфигурации  $k_s$ .

Вектор  $\overline{OA}^{(0)}$  — вектор проекций  $l_{40}^{(0)}$  на горизонтальную плоскость:

$$\overline{OA}^{(0)} = \begin{pmatrix} l_{40x}^{(0)} \\ l_{40y}^{(0)} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Вектор  $\overline{OA}^{(0)}$  определяет направление  $l_1^{(0)} = \overline{OD}^{(0)}$  и  $Y_1^{(0)}$  с учетом значения индекса кинематической конфигурации  $k_s (+1, -1)$ :

$$l_1^{(0)} = k_s \cdot \frac{\overline{OA}^{(0)}}{\sqrt{(l_{40x}^{(0)})^2 + (l_{40y}^{(0)})^2}} |l_1|,$$

$$Y_1^{(0)} = k_s \cdot \frac{\overline{OA}^{(0)}}{\sqrt{(l_{40x}^{(0)})^2 + (l_{40y}^{(0)})^2}},$$

где  $Y_1^{(0)}$  — 2-й столбец матрицы  $\tau_{01}$ .

Вектор  $l_{41}^{(0)} = \overline{DC}^{(0)}$  как разность векторов  $l_{40}^{(0)}$  и  $l_1^{(0)}$  находят из уравнения

$$l_{41}^{(0)} = l_{40}^{(0)} - k_s \cdot \frac{\overline{OA}^{(0)}}{\sqrt{(l_{40x}^{(0)})^2 + (l_{40y}^{(0)})^2}} |l_1|.$$

Орт  $Z_1^{(0)}$  определяют как векторное произведение:

$$Z_1^{(0)} = (-Z_0^{(0)} \times Y_1^{(0)});$$

угол  $q_1$  — как

$$\sin(q_1) = (X_0^{(0)} \times -Z_1^{(0)}) \cdot (Z_0^{(0)}),$$

$$\cos(q_1) = (-Z_1^{(0)} \cdot X_0^{(0)}),$$

$$q_1 = \text{arctg} \left( \frac{\sin q_1}{\cos q_1} \right),$$

где

$$X_0^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Z_0^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Зная  $q_1$ , вычисляют матрицу  $\tau_{01}(q_1)$ :

$$\tau_{01}(q_1) = [\varepsilon_1 \cdot \tau_Z(q_1)]^T.$$

Орты  $Z_1^{(0)} = -Z_2^{(0)}$  находят как 3-й столбец матрицы  $\tau_{01}$ , орт  $X_1^{(0)}$  — как ее 1-й столбец.

В расчетах следует учесть, что

$$Z_1^{(0)} = -Z_2^{(0)}, \quad Z_5^{(0)} = Z_6^{(0)}.$$

Для расчета угла  $q_2$  вычисляют векторы  $|l_{42}^{(0)}|$  и  $|l_2^{(0)}|$ , а затем модуль вектора  $|l_{41}^{(0)}|$ .

Полупериметр  $P$  треугольника, построенного на векторах  $l_2^{(0)}$ ,  $l_{42}^{(0)}$  и  $l_{41}^{(0)}$ , определяют как

$$P = \frac{(|l_2| + \sqrt{|l_3|^2 + |l_4|^2} + |l_{41}|)}{2}.$$

Затем вычисляют угол  $A$  (рис. П.3) и угол  $Q$  (рис. П.4):

$$\frac{A}{2} = \operatorname{arctg} \left( \frac{\sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{A}{2}} \right),$$

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(P - |l_2|) \cdot (P - |l_{41}|)}{|l_2| \cdot |l_{41}|}},$$

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{P \cdot (P - \sqrt{|l_3|^2 + |l_4|^2})}{|l_2| \cdot |l_{41}|}}.$$

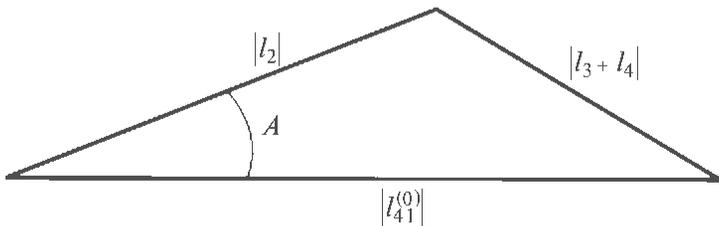


Рис. П.3. Схема для вычисления угла  $A$

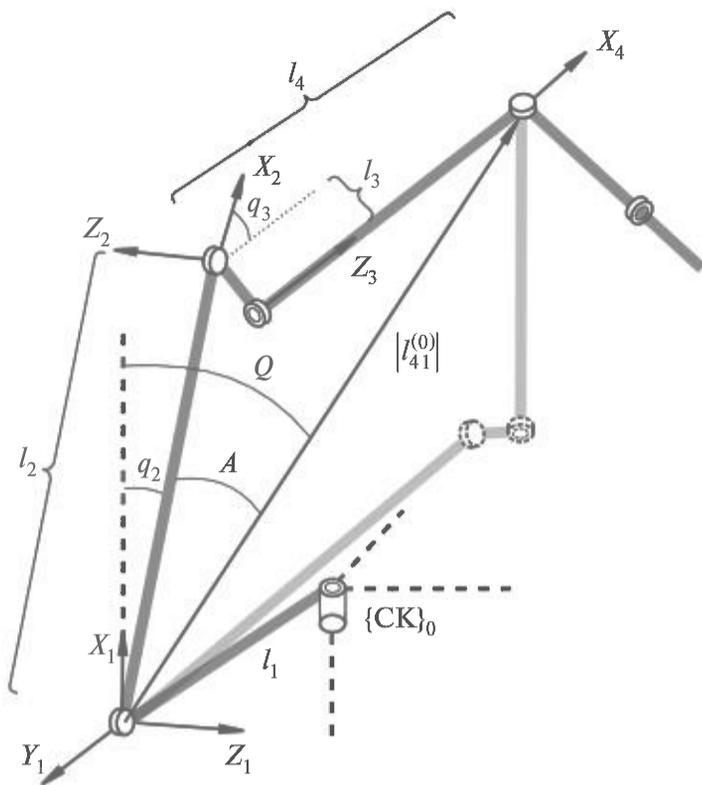


Рис. П.4. Схема для вычисления угла  $Q$

Из рис. П.4 следует, что

$$\cos Q = \frac{X_1^{(0)} \cdot I_{41}^{(0)}}{|I_{41}^{(0)}|},$$

$$\sin Q = \frac{(X_1^{(0)} \cdot I_{41}^{(0)}) \cdot Z_1^{(0)}}{|I_{41}^{(0)}|}.$$

Тогда

$$Q = \operatorname{arctg} \left( \frac{\sin Q}{\cos Q} \right),$$

$$q_2 = Q + \operatorname{sgn}(k_e) A,$$

где

$$\operatorname{sgn}(k_e) = \pm 1.$$

Далее вычисляют  $q_3$ . По значениям известных углов  $q_1$  и  $q_2$  находят матрицу  $\tau_{02}(q_1, q_2)$ :

$$\tau_{02}(q_1, q_2) = \tau_{01}(q_1) \cdot \tau_{12}(q_1) = [\varepsilon_1 \cdot \tau_Z(q_1)]^T \cdot [\varepsilon_2 \cdot \tau_Z(q_2)]^T.$$

Затем вычисляют вектор  $l_{42}^{(0)}$ :

$$l_{42}^{(0)} = l_{41}^{(0)} - \tau_{02} \cdot l_2^{(2)}.$$

Этот вектор поможет найти орт  $X_4^{(0)}$ . По рис. П.5 определяют угол  $q_3$ .

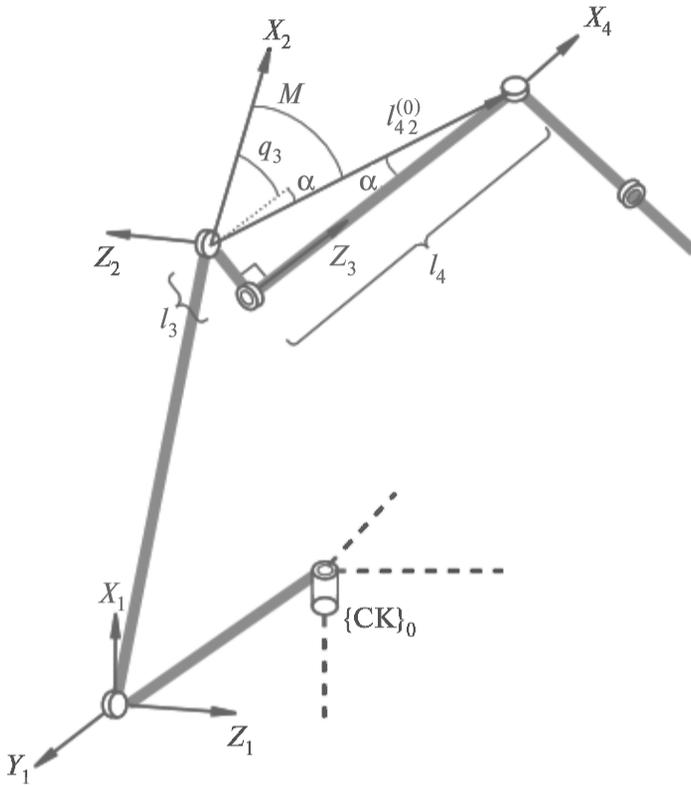


Рис. П.5. Схема для вычисления угла  $q_3$

Оси  $Z_3^{(0)}$  и  $X_4^{(0)}$  сонаправлены. Угол  $M$  находят по рис. П.5:

$$\cos M = \frac{X_2^{(0)} \cdot l_{42}^{(0)}}{|l_{42}^{(0)}|},$$

$$\sin M = \frac{(X_2^{(0)} \times l_{42}^{(0)}) \cdot Z_2^{(0)}}{|l_{42}^{(0)}|}.$$

Орт  $X_2^{(0)}$  представляет собой 1-й столбец матрицы  $\tau_{02}(q_1, q_2)$ . Зная  $X_2^{(0)}$  и  $Z_3^{(0)}$ , можно вычислить угол  $q_3$ :

$$\cos(q_3) = (X_2^{(0)} \cdot Z_3^{(0)}), \quad \sin(q_3) = (X_2^{(0)} \times Z_3^{(0)}) \cdot Z_2^{(0)}.$$

Тогда

$$q_3 = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin q_3}{\cos q_3}\right).$$

Из выражения

$$Z_6^{(0)} \times Z_3^{(0)} = \pm Z_4^{(0)} \cdot \sin(Z_6^{(0)}, Z_3^{(0)})$$

следует, что знак  $Z_4^{(0)}$  зависит от знака индекса  $k_w$ :

$$Z_4^{(0)} = \operatorname{sgn}(k_w) \frac{Z_6^{(0)} \times Z_3^{(0)}}{\sqrt{1 - (Z_6^{(0)} \cdot Z_3^{(0)})^2}}.$$

Очевидно, что

$$Z_3^{(0)} = X_4^{(0)}, \quad X_3^{(0)} = -Z_2^{(0)}.$$

Зная  $Z_4^{(0)}$ , можно вычислить угол  $q_4$ :

$$\cos(q_4) = (Z_2^{(0)} \cdot Z_4^{(0)}),$$

$$\sin(q_4) = (Z_2^{(0)} \cdot Z_4^{(0)}) \cdot Z_3^{(0)},$$

$$q_4 = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin q_4}{\cos q_4}\right).$$

Далее вычисляют угол  $q_5$ :

$$\cos(q_5) = (Z_3^{(0)} \cdot Z_6^{(0)}),$$

$$\sin(q_5) = (Z_3^{(0)} \times Z_6^{(0)}) \cdot Z_4^{(0)},$$

$$q_5 = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin q_5}{\cos q_5}\right)$$

и последний угол —  $q_6$ :

$$\cos(q_6) = (Z_4^{(0)} \cdot X_6^{(0)}),$$

$$\sin(q_6) = (Z_4^{(0)} \times X_6^{(0)}) \cdot Z_6^{(0)},$$

$$q_6 = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin q_6}{\cos q_6}\right).$$

Представленные соотношения позволяют получить однозначное (с учетом индексов конфигурации) решение ОКЗ для промышленного робота Kawasaki FS20N с рассматриваемой кинематической схемой.

## Пример решения прямой кинематической задачи об угловой скорости звеньев исполнительного механизма

Рассмотрим решение прямой кинематической задачи о скорости для промышленного робота Kawasaki FS20N (см. расчетную кинематическую схему робота на рис. П.1 в приложении 1).

Имеем угловую скорость последнего звена:

$$\omega_6^{(Б)} = \begin{pmatrix} \omega_x^{(Б)} \\ \omega_y^{(Б)} \\ \omega_z^{(Б)} \end{pmatrix}, \quad \omega_6^{(Б)} = \sum_{j=1}^i c_j^{(Б)} \dot{q}_j,$$

где

$$c_1^{(Б)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad c_4^{(Б)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$c_2^{(Б)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_5^{(Б)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$c_3^{(Б)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_6^{(Б)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \omega_6^{(Б)} = & (0 \ 0 \ -1)^T \dot{q}_1 + (-1 \ 0 \ 0)^T \dot{q}_2 + (1 \ 0 \ 0)^T \dot{q}_3 + \\ & + (0 \ 0 \ 1)^T \dot{q}_4 + (1 \ 0 \ 0)^T \dot{q}_5 + (0 \ 0 \ 1)^T \dot{q}_6. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\omega_{6x}^{(Б)} = -\dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_5$$

$$\omega_{6z}^{(Б)} = -\dot{q}_1 + \dot{q}_4 + \dot{q}_6.$$

Полученные уравнения связывают между собой векторы угловой скорости последнего звена исполнительного механизма в  $\{СК\}_Б$  и вектор его производных обобщенных координат.

## Пример решения прямой кинематической задачи о линейной скорости звеньев исполнительного механизма

Рассмотрим решение прямой кинематической задачи о линейной скорости для промышленного робота Kawasaki FS20N (см. расчетную кинематическую схему робота на рис. П.1 в приложении 1).

Выражение для определения линейной скорости последнего звена имеет вид

$$V_6^{(Б)} = \begin{pmatrix} V_x^{(Б)} \\ V_y^{(Б)} \\ V_z^{(Б)} \end{pmatrix},$$

$$V_6^{(Б)} = \sum_{j=1}^i D_{6j}^{(Б)} \dot{q}_j,$$

где

$$D_{61}^{(Б)} = \lambda(c_1^{(Б)}) R_{61}^{(Б)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r_{61} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$D_{62}^{(Б)} = \lambda(c_2^{(Б)}) R_{62}^{(Б)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r_{62} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ r_{62} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$D_{63}^{(Б)} = \lambda(c_3^{(Б)}) R_{63}^{(Б)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r_{63} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -r_{63} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$D_{64}^{(Б)} = \lambda(c_4^{(Б)}) R_{64}^{(Б)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r_{64} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$D_{65}^{(Б)} = \lambda(c_5^{(Б)}) R_{65}^{(Б)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r_{65} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -r_{65} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$D_{66}^{(B)} = \lambda(c_6^{(B)}) R_{66}^{(B)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r_{66} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где  $r_{61}, \dots, r_{66}$  — длины векторов, проведенных из начала СК звеньев к точке на последнем звене.

Тогда

$$V_6^{(B)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_{62} & r_{63} & 0 & -r_{65} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{q}.$$

Из полученного выражения следует, что компоненты  $V_{6x}^{(B)}$  и  $V_{6z}^{(B)}$  вектора  $V_6^{(B)}$  не определены, а вектор  $V_6^{(B)}$  не зависит от  $\dot{q}_1$ ,  $\dot{q}_4$  и  $\dot{q}_6$ . Принимая это во внимание, откажемся от рассмотрения  $V_{6x}^{(B)}$ ,  $V_{6z}^{(B)}$ ,  $\dot{q}_1$ ,  $\dot{q}_4$  и  $\dot{q}_6$ . Это эквивалентно вычеркиванию из матрицы Якоби нулевых столбцов и строк. Можно записать:

$$V_6^{(B)} = \begin{pmatrix} r_{62} & -r_{63} & -r_{65} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_5 \end{pmatrix}.$$

Матрица Якоби имеет нулевые столбцы и строки и является вырожденной. Это означает, что в исходной постановке обратная задача не имеет решения.

## Пример расчета матрицы инерционных коэффициентов

Рассмотрим нахождение компонентов матрицы инерционных коэффициентов для промышленного робота Kawasaki FS20N (см. расчетную кинематическую схему робота Kawasaki FS20N на рис. П.1 в приложении 1). Принимаем известными значения координат шарниров  $q_1, q_2, \dots, q_n$  исполнительного механизма, векторы длин звеньев, матрицы поворота из СК звеньев в  $\{СК\}_B$ .

Расчет проводится для элемента матрицы  $A$ , соответствующего третьему звену манипулятора. С учетом выражения (2.13) можно записать:

$$a_{33} = \sum_{k=3}^6 \left( c_3^{(B)T} \cdot J_k^{(B)} \cdot c_3^{(B)} + D_{k3}^{(B)T} \cdot m_k \cdot D_{k3}^{(B)} \right).$$

Таким образом, для вычисления инерционного коэффициента для третьего звена МР необходимо определить следующие величины:

- $J_k^{(B)}, (k = 3, \dots, 6)$  — тензор инерции звена  $k$  в СК, оси которой параллельны осям  $\{СК\}_B$ , а начало совмещено с центром масс звена  $k$ ;
- вектор  $c_3^{(B)}$ ;
- матрицы  $D_{k3}^{(B)} (k = 3, \dots, 6)$ .

Для расчета массы и тензора инерции представим третье звено в виде, приведенном на рис. П.6.

Расчетную массу третьего звена исполнительного механизма определяют следующим образом:

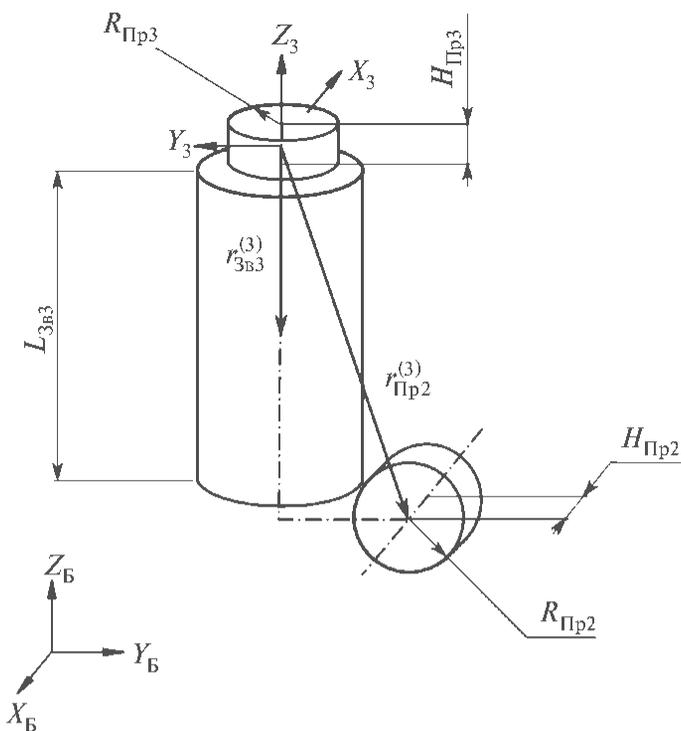
$$m_3 = \frac{m_{\text{Пп2}}}{2} + m_{3в3} + \frac{m_{\text{Пп3}}}{2},$$

где  $r_{\text{Пп3}}^{(3)}$  — вектор, соединяющий начало  $\{СК\}_3$  с центром масс третьего привода, заданный в  $\{СК\}_3$ ,  $r_{\text{Пп3}}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

В соответствии со схемой на рис. П.6 получаем

$$r_{\text{Пп2}}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ r_{\text{Пп2}y} \\ r_{\text{Пп2}z} \end{pmatrix},$$

$$r_{3в3}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r_{3в3z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{L_{3в3}}{2} \end{pmatrix}.$$



**Рис. П.6.** Схема для расчета инерционных параметров третьего звена исполнительного механизма промышленного робота Kawasaki FS20N:

$r_{Пp2}^{(3)}$  — вектор, соединяющий начало  $\{CK\}_3$  с центром масс второго привода, заданный в  $\{CK\}_3$ ;  
 $r_{3в3}^{(3)}$  — вектор, соединяющий начало  $\{CK\}_3$  с центром масс корпуса третьего звена, заданный в  $\{CK\}_3$ ; *известные величины:*  $m_{Пp2}$  — масса второго привода;  $m_{3в3}$  — масса третьего звена;  $m_{Пp3}$  — масса третьего привода;  $R_{Пp2}$  — радиус второго привода;  $R_{Пp3}$  — радиус третьего привода;  $R_{3в3}$  — радиус корпуса третьего звена;  $L_{3в3}$  — длина корпуса третьего звена;  $H_{Пp2}$  — толщина второго привода;  $H_{Пp3}$  — толщина третьего привода

Находим координаты центра масс звена:

$$r_3^{(3)} = \begin{pmatrix} r_{3x} \\ r_{3y} \\ r_{3z} \end{pmatrix}.$$

Как известно, координаты центра масс находят по формуле

$$r_c = \frac{\sum_j r_j^{(i)} \cdot m_j}{\sum_j m_j},$$

где  $r_c$  — радиус-вектор центра масс тела;  $r_j^{(i)}$  — радиус-вектор центра масс  $j$ -го элемента тела;  $m_j$  — масса  $j$ -го элемента тела.

В рассматриваемом случае

$$r_3^{(3)} = \frac{r_{\text{Пр}2}^{(3)} \cdot m_{\text{Пр}2} + r_{3\text{в}3}^{(3)} \cdot m_{3\text{в}3} + r_{\text{Пр}3}^{(3)} \cdot m_{\text{Пр}3}}{m_3}.$$

Тогда значения координат центра масс в  $\{\text{СК}\}_3$ :

$$r_{3x} = 0,$$

$$r_{3y} = \frac{r_{\text{Пр}2y} \cdot m_{\text{Пр}2}}{m_3},$$

$$r_{3z} = \frac{r_{\text{Пр}2z} \cdot m_{\text{Пр}3} - \frac{L_{3\text{в}3}}{2} \cdot m_{3\text{в}3}}{m_3}.$$

Для определения тензора инерции третьего звена находим тензоры инерции второго и третьего приводов, тензор инерции корпуса третьего звена в СК, оси которых параллельны осям  $\{\text{СК}\}_3$ , а начало совмещено с центром масс соответствующих элементов:

$$J_{\text{Пр}2x}^{(\text{Пр}2)} = \frac{1}{2} m_{\text{Пр}2} R_{\text{Пр}2}^2,$$

$$J_{\text{Пр}2y}^{(\text{Пр}2)} = J_{\text{Пр}2z}^{(\text{Пр}2)} = \frac{1}{12} m_{\text{Пр}2} (H_{\text{Пр}2}^2 + 3R_{\text{Пр}2}^2),$$

$$J_{3\text{в}3x}^{(3\text{в}3)} = J_{3\text{в}3y}^{(3\text{в}3)} = \frac{1}{12} m_{3\text{в}3} (H_{3\text{в}3}^2 + 3R_{3\text{в}3}^2),$$

$$J_{3\text{в}3z}^{(3\text{в}3)} = \frac{1}{2} m_{3\text{в}3} \cdot R_{3\text{в}3}^2,$$

$$J_{\text{Пр}3x}^{(\text{Пр}3)} = J_{\text{Пр}3y}^{(\text{Пр}3)} = \frac{1}{12} m_{\text{Пр}3} (H_{\text{Пр}3}^2 + 3R_{\text{Пр}3}^2),$$

$$J_{\text{Пр}3z}^{(\text{Пр}3)} = \frac{1}{2} m_{\text{Пр}3} \cdot R_{\text{Пр}3}^2.$$

Тензор инерции второго привода в СК, оси которой параллельны осям  $\{\text{СК}\}_3$ , а начало совмещено с центром масс третьего звена, определяют следующим образом:

$$J_{\text{Пр}2x}^{(3)} = J_{\text{Пр}2x}^{(\text{Пр}2)} + m_{\text{Пр}2} \cdot |r_{\text{Пр}2}^{(3)} - r_3^{(3)}|,$$

$$J_{\text{Пр}2y}^{(3)} = J_{\text{Пр}2y}^{(\text{Пр}2)} + m_{\text{Пр}2} (r_{\text{Пр}2z} - r_{3z}),$$

$$J_{\text{Пр}2z}^{(3)} = J_{\text{Пр}2z}^{(\text{Пр}2)} + m_{\text{Пр}2} (r_{\text{Пр}2y} - r_{3y}),$$

где  $|r_{\text{Пр}2}^{(3)} - r_3^{(3)}|$  — расстояние между центром масс третьего звена и центром масс второго привода исполнительного механизма МР.

Зная  $J_{\text{Пр}2x}^{(3)}$ ,  $J_{\text{Пр}2y}^{(3)}$  и  $J_{\text{Пр}2z}^{(3)}$ , можно определить тензор инерции второго привода:

$$J_{\text{Пр}2}^{(3)} = \begin{pmatrix} J_{\text{Пр}2x}^{(3)} & 0 & 0 \\ 0 & J_{\text{Пр}2y}^{(3)} & 0 \\ 0 & 0 & J_{\text{Пр}2z}^{(3)} \end{pmatrix}.$$

Аналогично рассчитывают тензор инерции корпуса третьего звена в СК, оси которой параллельны осям  $\{\text{СК}\}_3$ , а начало совмещено с центром масс третьего звена:

$$J_{3в3x}^{(3)} = J_{3в3x}^{(3в3)} + m_{3в3} \cdot |r_{3в3}^{(3)} - r_3^{(3)}|,$$

$$J_{3в3y}^{(3)} = J_{3в3y}^{(3в3)} + m_{3в3} (r_{3в3z} - r_{3z}),$$

$$J_{3в3z}^{(3)} = J_{3в3z}^{(3в3)} + m_{3в3} (r_{3в3y} - r_{3y}),$$

где  $|r_{3в3}^{(3)} - r_3^{(3)}|$  — расстояние между центром масс третьего звена и центром масс корпуса третьего звена исполнительного механизма МР.

В результате тензор инерции корпуса третьего звена

$$J_{3в3}^{(3)} = \begin{pmatrix} J_{3в3x}^{(3)} & 0 & 0 \\ 0 & J_{3в3y}^{(3)} & 0 \\ 0 & 0 & J_{3в3z}^{(3)} \end{pmatrix}.$$

Тензор инерции третьего привода в СК, оси которой параллельны осям  $\{\text{СК}\}_3$ , а начало совмещено с центром масс третьего звена, находят как

$$J_{\text{Пр}3x}^{(3)} = J_{\text{Пр}3x}^{(\text{Пр}3)} + m_{\text{Пр}3} \cdot |r_{\text{Пр}3}^{(3)} - r_3^{(3)}|,$$

$$J_{\text{Пр}3y}^{(3)} = J_{\text{Пр}3y}^{(\text{Пр}3)} + m_{\text{Пр}3} (r_{\text{Пр}3z} - r_{3z}),$$

$$J_{\text{Пр}3z}^{(3)} = J_{\text{Пр}3z}^{(\text{Пр}3)} + m_{\text{Пр}3} (r_{\text{Пр}3y} - r_{3y}),$$

где  $|r_{\text{Пр}3}^{(3)} - r_3^{(3)}|$  — расстояние между центром масс третьего звена и центром масс третьего привода исполнительного механизма МР.

Таким образом, тензор инерции третьего привода звена

$$J_{\text{Пр}3}^{(3)} = \begin{pmatrix} J_{\text{Пр}3x}^{(3)} & 0 & 0 \\ 0 & J_{\text{Пр}3y}^{(3)} & 0 \\ 0 & 0 & J_{\text{Пр}3z}^{(3)} \end{pmatrix}.$$

Из найденных значений тензоров инерции вычисляют тензор инерции третьего звена:

$$J_3^{(3)} = J_{\text{Пр}2}^{(3)} + J_{\text{Ст}3}^{(3)} + J_{\text{Пр}3}^{(3)}.$$

Аналогично получаем значения масс  $m_4, \dots, m_n$ , координаты центров масс  $r_4^{(1)}, \dots, r_6^{(6)}$  и тензоры инерции  $J_4^{(1)}, \dots, J_6^{(6)}$  остальных звеньев исполнительного механизма.

Для нахождения  $a_{33}$  необходимо определить  $J_3^{(0)}, \dots, J_6^{(0)}$  согласно выражению

$$J_i^{(0)} = \tau_{0i} \cdot J_i^{(i)} \cdot \tau_{i0},$$

где матрицы поворота  $\tau_{0i}, (i=1, \dots, 6)$  известны.

Имея  $c_3^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , получаем

$$a_{33} = (1 \ 0 \ 0) \{ J_3^{(0)} + J_4^{(0)} + J_5^{(0)} + J_6^{(0)} \} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{k=3}^6 D_{k3}^{(0)T} \cdot m_k \cdot D_{k3}^{(0)}.$$

Компоненты  $D_{k3}^{(0)}$  ( $k=3, \dots, 6$ ) в уравнении для  $a_{33}$ , соответственно:

$$D_{33}^{(0)} = \lambda(c_3^{(0)}) \cdot R_{33}^{(0)},$$

$$D_{43}^{(0)} = \lambda(c_3^{(0)}) \cdot R_{43}^{(0)},$$

$$D_{53}^{(0)} = \lambda(c_3^{(0)}) \cdot R_{53}^{(0)},$$

$$D_{63}^{(0)} = \lambda(c_3^{(0)}) \cdot R_{63}^{(0)},$$

где

$$R_{33}^{(0)} = l_3^{(0)} + \tau_{03} \cdot r_3^{(3)},$$

$$R_{43}^{(0)} = l_3^{(0)} + l_4^{(0)} + \tau_{04} \cdot r_4^{(4)},$$

$$R_{53}^{(0)} = I_3^{(0)} + I_4^{(0)} + I_5^{(0)} + \tau_{05} \cdot r_5^{(5)},$$

$$R_{63}^{(0)} = I_3^{(0)} + I_4^{(0)} + I_5^{(0)} + I_6^{(0)} + \tau_{06} \cdot r_6^{(6)}.$$

Подставив найденные значения в выражение для расчета  $a_{33}$ , получаем

$$\begin{aligned} a_{33} = & (1 \quad 0 \quad 0) \{ J_3^{(0)} + J_4^{(0)} + J_5^{(0)} + J_6^{(0)} \} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \\ & - (I_3^{(0)} + \tau_{03} \cdot r_3^{(3)})^T \cdot \lambda(c_3^{(0)}) \cdot m_3 \cdot \lambda(c_3^{(0)}) (I_3^{(0)} + \tau_{03} \cdot r_3^{(3)}) - \\ & - (I_3^{(0)} + I_4^{(0)} + \tau_{04} \cdot r_4^{(4)})^T \cdot \lambda(c_4^{(0)}) \cdot m_4 \cdot \lambda(c_4^{(0)}) (I_3^{(0)} + I_4^{(0)} + \tau_{04} \cdot r_4^{(4)}) - \\ & - (I_3^{(0)} + I_4^{(0)} + I_5^{(0)} + \tau_{05} \cdot r_5^{(5)})^T \cdot \lambda(c_5^{(0)}) \cdot m_5 \cdot \lambda(c_5^{(0)}) (I_3^{(0)} + I_4^{(0)} + I_5^{(0)} + \tau_{05} \cdot r_5^{(5)}) - \\ & - (I_3^{(0)} + I_4^{(0)} + I_5^{(0)} + I_6^{(0)} + \tau_{06} \cdot r_6^{(6)})^T \cdot \lambda(c_6^{(0)}) \cdot m_6 \cdot \lambda(c_6^{(0)}) (I_3^{(0)} + I_4^{(0)} + I_5^{(0)} + I_6^{(0)} + \tau_{06} \cdot r_6^{(6)}). \end{aligned}$$

Аналогичные соотношения можно получить для расчета остальных значений элементов матрицы инерционных коэффициентов для рассматриваемого промышленного робота Kawasaki FS20N.

## Оглавление

Предисловие.....	3
Список сокращений.....	4
Введение.....	5
I. КИНЕМАТИКА.....	8
1. Координаты и параметры.....	8
1.1. Описание и типы кинематических схем.....	8
1.2. Системы координат звеньев.....	11
1.3. Обобщенные координаты шарниров.....	12
1.4. Параметры.....	13
Контрольные вопросы и задания.....	15
2. Матрицы поворота.....	15
2.1. Понятие матрицы поворота.....	15
2.2. Матрицы элементарных поворотов.....	18
2.3. Матрица композиции элементарных поворотов.....	19
2.4. Матрицы поворота, используемые при записи уравнений.....	20
2.5. Производные по времени матриц поворота, используемых при записи уравнений.....	23
Контрольные вопросы и задания.....	26
3. Линейные координаты и углы ориентации звеньев.....	26
3.1. Линейные координаты звеньев.....	26
3.2. Углы ориентации звеньев относительно системы координат стойки.....	29
Контрольные вопросы и задания.....	31
4. Прямая и обратная позиционные кинематические задачи.....	32
4.1. Прямая позиционная кинематическая задача.....	32
4.2. Обратная позиционная кинематическая задача.....	33
Контрольные вопросы и задания.....	39
5. Угловые и линейные скорости звеньев.....	39
5.1. Угловые скорости звеньев.....	39
5.2. Понятие и свойства векторов $c_j^{(0)}$ и $c_j^{(i)}$ .....	40
5.3. Матрицы Якоби угловых скоростей звеньев.....	41
5.4. Линейные скорости звеньев.....	42
5.5. Понятие и свойства векторов $D_{ij}^{(0)V}$ и $D_{ij}^{(0)\omega}$ .....	43
5.6. Понятие и свойства векторов $D_{ij}^{(i)V}$ и $D_{ij}^{(i)\omega}$ .....	45
5.7. Матрица Якоби линейных скоростей звеньев.....	46
5.8. Матрица Якоби скоростей последнего звена.....	47
Контрольные вопросы и задания.....	48

6. Кинематические задачи .....	48
6.1. Прямая кинематическая задача .....	48
6.2. Обратная кинематическая задача.....	48
Контрольные вопросы и задания .....	49
7. Угловые и линейные ускорения звеньев.....	49
7.1. Угловые ускорения звеньев .....	49
7.2. Линейные ускорения звеньев.....	50
Контрольные вопросы .....	57
<b>II. ДИНАМИКА.....</b>	<b>58</b>
8. Силы и моменты.....	58
8.1. Силы, действующие на звенья .....	58
8.2. Моменты, действующие на звенья.....	60
8.3. Силы и моменты, действующие вдоль осей шарниров.....	66
8.4. Силы и моменты, развиваемые приводами манипулятора. Обратная задача динамики .....	66
8.5. Уравнения статического равновесия .....	68
Контрольные вопросы и задания .....	68
9. Уравнения движения. Прямая задача динамики.....	69
9.1. Получение уравнений движения.....	69
9.2. Матрица инерционных коэффициентов .....	71
9.3. Понятие и физический смысл вектора $b_i$ .....	73
9.4. Запись уравнений движения исполнительного механизма с использованием матриц преобразования между системами координат звеньев .....	74
Контрольные вопросы и задания .....	75
Литература.....	76
<i>Приложение 1.</i> Пример решения прямой позиционной кинематической задачи.....	77
<i>Приложение 2.</i> Пример решения обратной позиционной кинематической задачи.....	86
<i>Приложение 3.</i> Пример решения прямой кинематической задачи об угло- вой скорости звеньев исполнительного механизма .....	93
<i>Приложение 4.</i> Пример решения прямой кинематической задачи о ли- нейной скорости звеньев исполнительного механизма .....	94
<i>Приложение 5.</i> Пример расчета матрицы инерционных коэффициентов.....	96

*Учебное издание*

**Лесков Алексей Георгиевич**  
**Бажинова Ксения Владимировна**  
**Селиверстова Елена Владимировна**

## **Кинематика и динамика исполнительных механизмов манипуляционных роботов**

Редактор *Л.В. Сивай*  
Художник *Я.М. Асинкритова*  
Корректор *Н.В. Савельева*  
Компьютерная верстка *Л.И. Беликовой*

Оригинал-макет подготовлен  
в Издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана.

В оформлении использованы шрифты  
Студии Артемия Лебедева.

Подписано в печать 15.07.2017. Формат 70×100/16.  
Усл. печ. л. 8,45. Тираж 50 экз. Изд. № 166-2017. Заказ

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана.  
105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.  
[press@bmstu.ru](mailto:press@bmstu.ru)  
[www.baumanpress.ru](http://www.baumanpress.ru)

Отпечатано в типографии МГТУ им. Н.Э. Баумана.  
105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.  
[baumanprint@gmail.com](mailto:baumanprint@gmail.com)